



Introduction à la Résistance des Matériaux

Vincent MAGNET

version 4.0 - Janvier 2011

Table des Matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | vii |
| ■ PARTIE 1 : Chapitres abordés en amphithéâtre | 1 |
| <hr/> | |
| I ► Géométrie et statique des poutres | 3 |
| I.1 Généralités | 4 |
| I.2 Définition et caractérisation géométrique d'une poutre | 4 |
| I.3 Hypothèses de la théorie des poutres | 5 |
| I.4 Notion de torseur d'effort | 5 |
| I.5 Efforts extérieurs et liaisons entre solides | 7 |
| I.5.1 Efforts de liaisons sans travail des réactions | 7 |
| I.5.2 Efforts de liaisons avec travail des réactions | 8 |
| I.5.3 Efforts de chargements | 9 |
| I.6 Principe fondamental de la statique (PFS) | 9 |
| I.7 Caractéristiques d'une section droite Σ | 10 |
| I.8 Le PFS sur un exemple | 12 |
| II ► Efforts intérieurs | 15 |
| II.1 Définitions | 16 |
| II.2 Calcul pratique des efforts intérieurs | 17 |
| II.3 Lien avec le tenseur des contraintes | 18 |
| II.4 Equations d'équilibre sous forme locale | 19 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| II.5 | Méthodologie sur un exemple | 21 |
| III | ► Etude des déplacements | 25 |
| III.1 | Rappels succincts de MMC | 26 |
| III.1.1 | Déformations | 26 |
| III.1.2 | Energie et loi de comportement | 27 |
| III.1.3 | Théorème d'intégration du champ de déformation | 28 |
| III.1.4 | Méthode d'obtention du champ de contrainte | 29 |
| III.2 | Etude de l'effort normal | 29 |
| III.2.1 | Poutre de section rectangulaire | 29 |
| III.2.2 | Poutre de section quelconque | 31 |
| III.2.3 | Synthèse de la méthode | 32 |
| III.3 | Etude du moment de flexion | 32 |
| III.3.1 | Poutre de section rectangulaire | 32 |
| III.3.2 | Poutre de section quelconque | 33 |
| III.4 | Etude de la torsion (poutre cylindrique de révolution) | 33 |
| III.5 | Etude de l'effort tranchant | 35 |
| III.6 | Sollicitations combinées : formules de Bresse | 35 |
| IV | ► Energétique des structures | 39 |
| IV.1 | Notion de degrés de liberté | 40 |
| IV.2 | Théorème de Castigliano | 41 |
| IV.3 | Théorème de Ménabréa | 42 |
| IV.4 | Exemple | 43 |
| ■ | PARTIE 2 : Chapitres non abordés en amphithéâtre | 49 |
| V | ► Etude des treillis plans | 51 |
| V.1 | Présentation générale | 52 |
| V.2 | Equilibre des noeuds | 53 |
| V.3 | Loi de comportement des barres | 54 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| V.4 | Bilan et méthodologie | 55 |
| V.5 | Méthodologie sur un exemple | 56 |
| V.5.1 | Énoncé du problème | 56 |
| V.5.2 | Equations de liaisons | 56 |
| V.5.3 | Équilibre des noeuds | 57 |
| V.5.4 | Loi de comportement des barres | 57 |
| V.5.5 | Bilan et résolution numérique | 58 |
| V.5.6 | Quelques remarques sur les résultats précédents | 60 |
| VI | ► Les critères de ruptures | 61 |
| VI.1 | Définition générale | 62 |
| VI.1.1 | Rappels sur les invariants | 62 |
| VI.1.2 | Définition générale d'un critère | 63 |
| VI.2 | Quelques critères | 64 |
| VI.2.1 | Le critère de Von Mises | 64 |
| VI.2.2 | Le critère de Drücker-Prager | 65 |
| VI.2.3 | Le critère de Mohr-Coulomb | 66 |
| VI.2.4 | Le critère de Tresca | 66 |
| VI.2.5 | Enfin... | 67 |
| VI.3 | Application : rupture d'une poutre sollicitée en torsion | 67 |
| ■ | PARTIE 3 : Exercices abordés en séances de TD | 69 |
| VII | ► Énoncés des TD | 71 |
| Exercice 1 | : Equilibre d'une grue | 72 |
| Exercice 2 | : Equilibre d'une arche soumise au vent | 73 |
| Exercice 3 | : Calcul du moment d'inertie d'un profilé en I | 74 |
| Exercice 4 | : Calcul du moment d'inertie d'un profilé tubulaire | 75 |
| Exercice 5 | : Etude d'un portique articulé-appuyé | 76 |
| Exercice 6 | : Etude d'une poutre encastrée | 77 |

| | |
|--|------------|
| Exercice 7 : Profil d'un château d'eau | 78 |
| Exercice 8 : Etude de la déformée d'une poutre soumise à un moment | 79 |
| Exercice 9 : Etude d'un ressort à lame | 80 |
| Exercice 10 : Rupture d'une poutre en flexion | 81 |
| Exercice 11 : Etude d'une structure hyperstatique | 82 |
| Exercice 12 : Etude d'une liaison imparfaite | 83 |
| Exercice 13 : Etude de la stabilité d'un toit de galerie | 84 |
| Exercice 14 : Problème-type donné à la colle | 85 |
| VIII ► Éléments de correction des TD | 91 |
| Exercice 1 : Equilibre d'une grue | 92 |
| Exercice 2 : Equilibre d'une arche soumise au vent | 93 |
| Exercice 3 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé en I | 94 |
| Exercice 4 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé tubulaire | 95 |
| Exercice 5 : Etude d'un portique articulé-appuyé | 96 |
| Exercice 6 : Etude d'une poutre encastrée | 97 |
| Exercice 7 : Profil d'un château d'eau | 98 |
| Exercice 8 : Etude de la déformée d'une poutre soumise à un moment | 99 |
| Exercice 9 : Etude d'un ressort à lame | 100 |
| Exercice 10 : Rupture d'une poutre en flexion | 101 |
| Exercice 11 : Etude d'une structure hyperstatique | 102 |
| Exercice 12 : Etude d'une liaison imparfaite | 103 |
| Exercice 13 : Etude de la stabilité d'un toit de galerie | 104 |
| Exercice 14 : Problème-type donné à la colle | 105 |
| Conclusion | 107 |

Introduction

Chers étudiants,

Cette introduction à la Résistance Des Matériaux (RDM, dont une partie importante est aussi appelée Théorie des Poutres, objet principal de ce cours) est fortement inspirée du cours dispensé par Jean-François Schmitt à l'ENSEM. Toutefois, le point de vue adopté n'est pas le même. On se place ici en tant qu'"utilisateur" de la théorie : par conséquent, vous ne trouverez aucune démonstration complète des résultats présentés. En revanche, nous essaierons de souligner les méthodes permettant d'aboutir à ces principaux résultats, ainsi que les réflexes de résolution de RDM que vous devrez acquérir. La présentation de ce cours a quelque peu changé par rapport à sa troisième version. En particulier, les énoncés des TD ainsi que des éléments de correction ont été corrigés/ajoutés, grâce à la participation active de mon collègue Théophile Guillon.

Il se peut que des coquilles subsistent ; vous pouvez (devez ?) m'avertir des éventuelles erreurs de saisie (ou de calcul) que vous auriez décelées. De manière générale, n'hésitez pas à me faire part de vos remarques ; celles-ci ne peuvent, a priori, qu'améliorer la qualité du cours....

Vincent Magnenet

Première partie

Chapitres abordés en amphithéâtre

Géométrie et statique des poutres

Sommaire

| | | |
|-------|--|----|
| I.1 | Généralités | 4 |
| I.2 | Définition et caractérisation géométrique d'une poutre | 4 |
| I.3 | Hypothèses de la théorie des poutres | 5 |
| I.4 | Notion de torseur d'effort | 5 |
| I.5 | Efforts extérieurs et liaisons entre solides | 7 |
| I.5.1 | Efforts de liaisons sans travail des réactions | 7 |
| I.5.2 | Efforts de liaisons avec travail des réactions | 8 |
| I.5.3 | Efforts de chargements | 9 |
| I.6 | Principe fondamental de la statique (PFS) | 9 |
| I.7 | Caractéristiques d'une section droite Σ | 10 |
| I.8 | Le PFS sur un exemple | 12 |

I.1 Généralités

Schématiquement, la Résistance des Matériaux est la discipline qui étudie le dimensionnement des structures. Nous nous limitons ici à la Théorie des Poutres, qui consiste en l'étude de solides ayant une géométrie particulière. Grosso modo, nous allons simplifier les équations de l'élasticité connues en 3D au cas de structures ayant une dimension plus grande devant les deux autres. Cette simplification permet une résolution complète (mais approchée) de problèmes de mécanique : les efforts et les déplacements au sein de la structure pourront a priori être déterminés.

I.2 Définition et caractérisation géométrique d'une poutre

Entrons dans le vif du sujet en énonçant la :

DÉFINITION I.2.1 : Une poutre est un solide engendré par une surface plane Σ (éventuellement variable) lorsque le centre de gravité G de Σ décrit un arc de courbe $\widehat{G_1G_2}$, le plan de Σ restant toujours orthogonal à cet arc. La dimension longitudinale (suivant $\widehat{G_1G_2}$) doit être grande par rapport aux autres. ■

A l'intérieur d'une poutre, on appelle **fibre moyenne** ou **ligne moyenne** l'arc de courbe $\widehat{G_1G_2}$, et **section droite** la section Σ . On introduit également le **diamètre** d'une section droite D : il s'agit de la distance séparant les deux points de Σ les plus éloignés. Il est coutumier de noter G un point courant de la poutre, repéré par son **abscisse curviligne** s . Notons que, par définition de s , la poutre doit être **orientée** vers les s croissants (voir figure I.1). Plusieurs types de poutres peuvent être distingués :

- les **poutres droites**, pour lesquelles la fibre moyenne est rectiligne,
- les **poutres planes**, pour lesquelles la fibre moyenne est contenue dans un plan,
- les **poutres gauches**, pour lesquelles la fibre moyenne est quelconque,
- les **poutres à section variables**, si la section Σ varie avec s ,
- les **anneaux**, pour lesquelles la fibres moyenne est une courbe fermée.

On peut également envisager un ensemble de plusieurs poutres liées entre elles, on parle alors de **structure**.

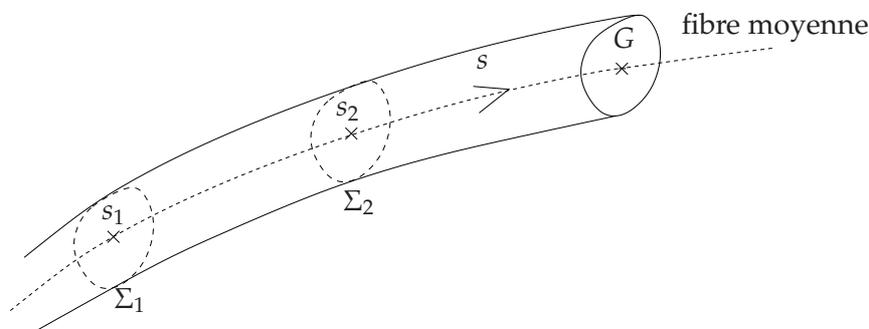


FIG. I.1: Représentation schématique d'une poutre

La résolution des équations de l'élasticité nécessite l'énoncé de plusieurs hypothèses, que nous allons présenter.

I.3 Hypothèses de la théorie des poutres

On adoptera dans ce cours 5 hypothèses :

- ❶ Conformément à la définition I.2.1, le diamètre D devra être "faible" devant la longueur L et le rayon de courbure R de la fibre moyenne¹.
- ❷ Si la section droite Σ est non constante, ses variations (de forme, de taille) en fonction de l'abscisse curviligne s de G appartenant à $\widehat{G_1G_2}$ sont "lentes".
- ❸ On se place dans le cadre des petites perturbations. Cette hypothèse permet :
 - d'identifier la configuration déformée à la configuration de référence et donc de formuler aisément les équations régissant l'équilibre d'une structure,
 - de linéariser toutes les quantités et toutes les équations par rapport aux grandeurs de perturbation.
- ❹ Hypothèse de Saint-Venant : tous les efforts qui interviennent dans la théorie des poutres peuvent être schématisés par leur torseur résultant (cette notion est présentée dans la suite).
- ❺ Hypothèse de Navier-Bernoulli² : les sections droites Σ restent planes et normales à la fibre moyenne déformée.

Quand bien même ces hypothèses n'apparaîtront pas toutes explicitement dans la suite, il est important de les garder à l'esprit afin de bien cerner le domaine de validité de la théorie des poutres. Avant de présenter la méthode permettant d'écrire les équations d'équilibre, nous allons introduire un objet mathématique caractérisant l'action sur une structure.

I.4 Notion de torseur d'effort

Pour bien comprendre la notion de torseur, considérons une vis autoperçante³ que nous aimerions visser dans un support relativement tendre (du bois par exemple), conformément à la figure I.2. L'action sur la vis, au point P , peut être décrite par deux vecteurs : un vecteur force \vec{F} qui traduit l'appui sur la vis pour la faire pénétrer dans son support, et un vecteur moment \vec{M} qui traduit la résistance à la rotation autour de son axe (le filetage doit vaincre le frottement dû au support). De manière générale, une action extérieure sur une structure peut être décrite en un point P par ces deux vecteurs : un traduisant intuitivement la résistance à la translation, et l'autre à la rotation. On peut alors énoncer la

DÉFINITION I.4.1 : *Le torseur $\{\mathcal{T}\}$ associé à la force \vec{F} et au moment \vec{M} s'appliquant au*

¹on peut par exemple supposer que $D/L < 10$

²prendre garde à l'écriture de "Bernoulli". Un moyen mnémotechnique est de se souvenir qu'il n'était pas une nouille...

³une telle vis ne nécessite pas de trou préalable. Le trou se perce au fur et à mesure que la vis est vissée.

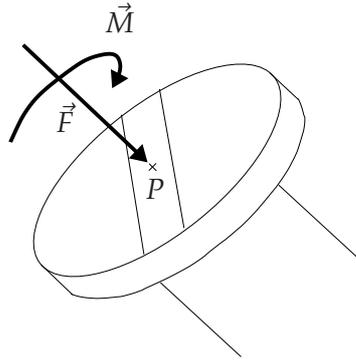


FIG. I.2: Action sur la tête d'une vis, illustrant la notion de force et de moment.

point P est le couple de vecteurs noté

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M} \end{array} \right\}_P \quad (\text{I.1})$$

\vec{F} est appelée **résultante** de $\{\mathcal{T}\}$ tandis que \vec{M} est son **moment** en P . Le torseur traduit une action mécanique sur la structure. ■

Un torseur ayant une résultante et un moment nuls sera qualifié de **torseur nul**, et pourra être noté $\{0\}$. Il faut bien noter que l'écriture d'un torseur est associée au point d'application de \vec{F} et \vec{M} . En un autre point, il faut prendre en compte le fait que l'effet de la force \vec{F} est différent. De manière générale, on définit le **moment** en un point O d'une force \vec{F} s'exerçant en P par :

$$\vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{OP} \wedge \vec{F} \quad (\text{I.2})$$

Pour réécrire le torseur I.1 en un point O quelconque, il convient de superposer deux contributions pour le moment : ❶ le moment \vec{M} imposé par l'extérieur au point P et ❷ le moment de \vec{F} dû au bras de levier \vec{OP} . On peut donc déduire le :

RÉSULTAT I.4.1 : En un point O qui n'est pas le point d'application de \vec{F} et \vec{M} , le torseur $\{\mathcal{T}\}$ associé à \vec{F} et \vec{M} s'écrit :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_O = \vec{M} + \vec{OP} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_O \quad (\text{I.3})$$

On note \vec{M}_O le moment "total" du torseur en O . On remarquera qu'il est primordial d'indiquer le point d'écriture du torseur (le point O dans le résultat I.4.1), puisque la définition du moment fait intervenir ce point. En pratique, on l'indique en indice du torseur. D'autre part, connaître un torseur en un point revient à le connaître partout. En effet :

- la résultante \vec{F} et le moment \vec{M} imposé par l'extérieur au point P ne dépendent pas du point où le torseur est écrit,
- en revanche, la contribution au moment total due à \vec{F} dépend du point. Si on connaît cette contribution $\vec{M}_{\vec{F},O}$ en un point O de l'espace, alors la relation de Chasles implique, pour

un point quelconque A :

$$\vec{M}_{\vec{F},A} = \vec{AP} \wedge \vec{F} = (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge \vec{F} = \vec{AO} \wedge \vec{F} + \vec{M}_{\vec{F},O} \quad (\text{I.4})$$

En ajoutant \vec{M} de part et d'autre, on obtient le moment total du torseur en A et le moment total en O :

$$\underbrace{\vec{M} + \vec{M}_{\vec{F},A}}_{\text{moment total en } A, \text{ noté } \vec{M}_A} = \underbrace{\vec{M} + \vec{M}_{\vec{F},O}}_{\text{moment total en } O, \text{ noté } \vec{M}_O} + \vec{AO} \wedge \vec{F} \quad (\text{I.5})$$

En changeant légèrement les notations, on peut donc énoncer le :

RÉSULTAT I.4.2 : *Connaître un torseur $\{\mathcal{T}\}$ en un point absolument quelconque A revient à le connaître en tout point B de l'espace car il suffit d'appliquer la formule de changement de point :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_B \quad (\text{I.6})$$

Revenons brièvement à l'hypothèse de Saint-Venant ④. Nous verrons ultérieurement qu'il est possible de définir un torseur "résumant" l'état de contrainte dans la structure : le torseur des efforts intérieurs. Ce torseur est déduit du tenseur des contraintes par une intégration sur une section droite Σ . Ainsi, deux répartitions de contraintes différentes pourront conduire au même torseur d'efforts intérieurs. L'hypothèse de Saint-Venant signifie donc que le détail de la répartition des contraintes n'est pas important pour décrire l'équilibre mécanique à l'échelle de la structure. Seul leur torseur résultant importe.

I.5 Efforts extérieurs et liaisons entre solides

Une poutre est reliée à son environnement par des **liaisons**. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont les **inconnues du problème**. Identifier la nature d'une liaison revient à définir la forme du torseur associé aux efforts de liaison. On évoquera dans ce cours deux types de liaisons.

I.5.1 Efforts de liaisons sans travail des réactions

Ce type de liaisons repose sur un principe simple : si un déplacement est nul (respectivement une rotation), alors l'effort (respectivement le moment) associé à cette direction est a priori non nul (un effort s'oppose au mouvement). Réciproquement, si un déplacement est non nul, c'est qu'aucune force ne s'oppose au mouvement. Ce résultat s'appuie sur le fait que le travail T d'une force \vec{F} se déplaçant de \vec{u} est donné par $T = \vec{F} \cdot \vec{u}$. De même, le travail T d'un moment \vec{M} tournant d'un angle⁴ $\vec{\omega}$ est $T = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$. Passons en revue les liaisons les plus classiques, en introduisant un repère $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ que nous qualifierons dans la suite de **repère global** pour la structure :

⁴on note $\vec{\omega}$ le vecteur $\omega \vec{n}$, avec \vec{n} l'axe de la rotation

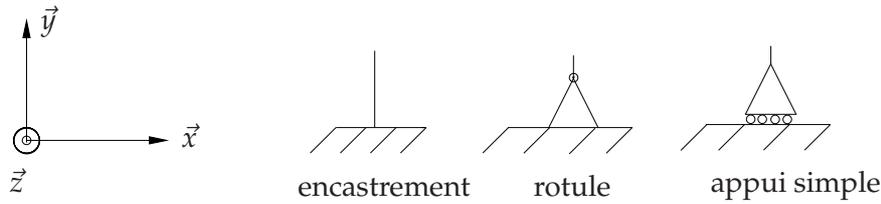


FIG. I.3: Représentation des liaisons planes les plus rencontrées

- la liaison **encastrement** : les 3 translations suivant les directions \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} et toutes les rotations autour de ces directions sont bloquées. Il y a donc 6 inconnues scalaires de liaisons : $\{F_x, F_y, F_z\}$, composantes de la résultante \vec{F} , et $\{M_x, M_y, M_z\}$, composantes du moment \vec{M} .
- la liaison **rotule sphérique** : les 3 rotations sont permises, mais pas les translations. On a donc $\vec{M} = 0$ et \vec{F} quelconque donc 3 inconnues de liaisons.

Si on se limite au cas des poutres planes chargées dans leur plan (\vec{x}, \vec{y}) , évoquons :

- la liaison **encastrement plan** : les 2 translations suivant les directions \vec{x} , \vec{y} et la rotation autour de \vec{z} sont bloquées. Il y a donc 3 inconnues scalaires de liaisons : F_x , F_y et M_z , qui sont les deux premières composantes de \vec{F} et la dernière composante de \vec{M} respectivement.
- la liaison **articulation** ou **rotule plane** : les 2 translations suivant les directions \vec{x} et \vec{y} sont bloquées, mais pas la rotation autour de \vec{z} . On a donc $M_z = 0$, et F_x et F_y sont les 2 seules inconnues de liaisons.
- la liaison **appui simple** ou **appui sur rouleaux** : seule la translation en \vec{y} est interdite. La seule inconnue de liaison est donc F_y .

Les représentations schématiques des liaisons planes évoquées ici sont données dans la figure I.3.

I.5.2 Efforts de liaisons avec travail des réactions

Si une modélisation en terme de liaison sans travail s'avère impossible ou trop grossière, on peut introduire des liaisons pour lesquelles les inconnues de liaisons travaillent. On n'a alors plus la dualité déplacement nul/force nulle ou déplacement nul/force non nulle. Il faut préciser le lien entre \vec{F} et \vec{u} . Présentons ici le cas d'un appui élastique de direction \vec{y} , comme représenté dans la figure I.4. Le lien entre la force \vec{F} et le déplacement \vec{u}_A du point A peut être écrit sous la forme suivante :

$$\vec{F} \cdot \vec{y} = k(\vec{u}_A \cdot \vec{y}) \quad (I.7)$$

où k est la **raideur** du ressort. Pour conclure, disons que les liaisons présentées dans cette section sont peu utilisées en pratique. Passons désormais aux autres types d'efforts auxquels une structure peut être soumise.

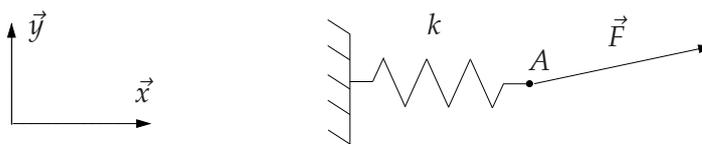


FIG. I.4: Exemple de liaison pour laquelle l'inconnue de liaison \vec{F} travaille.

I.5.3 Efforts de chargements

Aux forces de liaisons s'ajoutent les forces de chargement. Ces dernières peuvent être **réelles** (comme le poids d'un plafond sur un pilier par exemple) ou **réglementaires** (comme par exemple le poids de la neige ou l'action du vent sur un bâtiment). Pour l'ingénieur, elles font partie du cahier des charges donc nous les supposons connues. Une force de chargement peut être :

- **concentrée** : elle s'applique en un point de la structure, et son torseur associé est de forme "classique" (voir la définition I.4.1).
- **répartie** : on parle alors de **densité linéique de charge**. Pour rendre compte de ce type de force, on introduit un **torseur élémentaire**, qui est le torseur associé à la force exercée sur un tronçon infinitésimal de poutre (de longueur ds) situé autour d'un point G courant situé à l'abscisse curviligne s :

$$d\{\mathcal{T}_G^C\} = \left\{ \begin{array}{c} d\vec{F} \\ d\vec{M} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{f}ds \\ \vec{m}ds \end{array} \right\}_G \quad (\text{I.8})$$

avec \vec{f} et \vec{m} les densités linéiques de forces et de moment appliquées à la structure.

Le poids propre d'une poutre est un exemple de densité linéique de force, telle que $\vec{f} = \lambda \vec{g}$, avec λ la masse linéique de la poutre et \vec{g} l'accélération de la pesanteur. En revanche, il est assez délicat d'imaginer une densité linéique de moment \vec{m} si bien qu'en pratique, ce terme est très souvent nul.

A ce stade, nous avons présenté les différents types d'efforts pouvant s'appliquer sur une structure. Il convient à présent d'énoncer le principe physique qui permet de lier toutes ces forces.

I.6 Principe fondamental de la statique (PFS)

Le principe fondamental de la statique (ou PFS) permet de formuler les conditions que doivent vérifier les efforts que subit une structure pour que cette dernière soit en équilibre. Il est possible d'écrire le principe fondamental de la statique à l'aide de torseurs, comme le montre le

RÉSULTAT I.6.1 : (*Principe fondamental de la statique*) : une structure S est en équilibre extérieur si la somme des torseurs associés à tous les efforts s'appliquant sur S est égale au torseur nul :

$$\sum_{\rightarrow S} \{\mathcal{T}\} = \{0\} \quad (\text{I.9})$$

les torseurs devant tous être écrits au même point. ■

Pour les poutres, il conviendra de prendre en compte toutes les forces en présence : les efforts de liaisons et les efforts de chargement (qu'ils soient concentrés ou répartis). Ainsi, on pourra écrire l'équilibre d'une structure sous la forme :

$$\underbrace{\sum \{\mathcal{T}^L\}}_{\text{liaisons}} + \underbrace{\sum \{\mathcal{T}^C\}}_{\text{chargements ponctuels}} + \underbrace{\sum \int d\{\mathcal{T}^C\}}_{\text{chargements répartis}} = \{0\} \quad (\text{I.10})$$

l'intégrale des chargements répartis se faisant sur la portion de structure concernée. En 3D, il y a donc 6 équations scalaires (3 en résultante et 3 en moment). Pour une structure plane sollicitée dans son plan, il n'y a que 3 équations scalaires (2 en résultante et 1 en moment). Si on note n le nombre d'inconnues de liaisons et m le nombre d'équations indépendantes issues de l'application du PFS, on peut introduire une classification des structures, ce qui fait l'objet de la

DÉFINITION I.6.1 : Une structure est dite :

- instable s'il est impossible de vérifier les équations de la statique ($n < m$),
- isostatique extérieurement si les équations de la statique permettent de déterminer complètement les efforts de liaisons ($n = m$),
- hyperstatique extérieurement si ces équations ne suffisent pas ($n > m$). Dans ce cas, le degré d'hyperstaticité q est défini par $q = n - m$. ■

Il est important de noter que le caractère isostatique ou hyperstatique dépend uniquement de la structure et non du chargement. Nous verrons dans les chapitres suivants comment résoudre un problème de structure hyperstatique. Avant de présenter un exemple illustrant l'écriture des équations d'équilibre, il est crucial de présenter quelques résultats concernant la géométrie d'une section plane Σ . Ces résultats nous seront utiles dans la suite.

I.7 Caractéristiques d'une section droite Σ

On considère dans toute cette partie une section droite Σ dont le plan est rapporté à deux axes perpendiculaires \vec{y} et \vec{z} (voir figure I.5). Sur la section Σ , il existe un point particulier qui

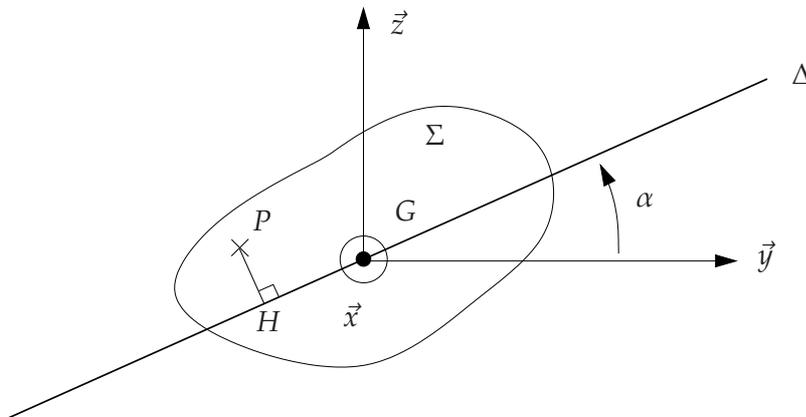


FIG. I.5: Section d'une poutre rapportée à un repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

fait l'objet de la

DÉFINITION I.7.1 : *Le centre de gravité de G de Σ , de coordonnées (y_G, z_G) , est tel que :*

$$y_G = \frac{1}{S} \int_{\Sigma} y dS, \quad z_G = \frac{1}{S} \int_{\Sigma} z dS \quad (\text{I.11})$$

Si Σ admet un axe de symétrie, G est sur cet axe, et si Σ admet 2 axes de symétrie, G est leur intersection. Introduisons également plusieurs grandeurs utiles :

DÉFINITION I.7.2 : *Les moments quadratiques I_y, I_z, I_x , et I_{yz} de Σ sont les quantités :*

$$I_y = \int_{\Sigma} z^2 dS, \quad I_z = \int_{\Sigma} y^2 dS, \quad I_x = \int_{\Sigma} (y^2 + z^2) dS = I_y + I_z, \quad I_{yz} = \int_{\Sigma} yz dS \quad (\text{I.12})$$

appelés de la façon suivante :

- I_y est le moment quadratique de Σ par rapport à l'axe y
- I_z est le moment quadratique de Σ par rapport à l'axe z
- I_x est le moment quadratique de Σ par rapport à l'axe x
- I_{yz} est le moment produit de Σ par rapport aux axes y et z ■

Notons que, par définition, I_y, I_z, I_x sont positifs. D'autre part, il existe des tables donnant les moments quadratiques des sections de formes classiques. Par exemple, une poutre de section circulaire de rayon a vérifie :

$$I_y = \frac{\pi a^4}{4}, \quad I_z = \frac{\pi a^4}{4}, \quad I_x = \frac{\pi a^4}{2} \quad (\text{I.13})$$

tandis qu'une section rectangulaire de cotés $2a$ (suivant \vec{y}) et $2b$ (suivant \vec{z}) vérifie :

$$I_y = \frac{4}{3} ab^3, \quad I_z = \frac{4}{3} a^3 b, \quad I_x = \frac{4}{3} ab(a^2 + b^2) \quad (\text{I.14})$$

En pratique, il est donc inutile de recalculer ces moments quadratiques. Avant de terminer cette section, et pour introduire la notion de repère local principal, nous allons avoir besoin d'énoncer la

DÉFINITION I.7.3 : *Le moment quadratique I_{Δ} de Σ par rapport à une droite Δ est défini par :*

$$I_{\Delta} = \int_{P \in \Sigma} PH^2 dS \quad \text{où } H \text{ est le projeté de } P \text{ sur } \Delta \quad (\text{I.15})$$

Si Δ fait un angle α avec l'axe \vec{y} (voir figure I.5) on peut montrer que :

$$I_{\Delta} = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \underbrace{\begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}}_I \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

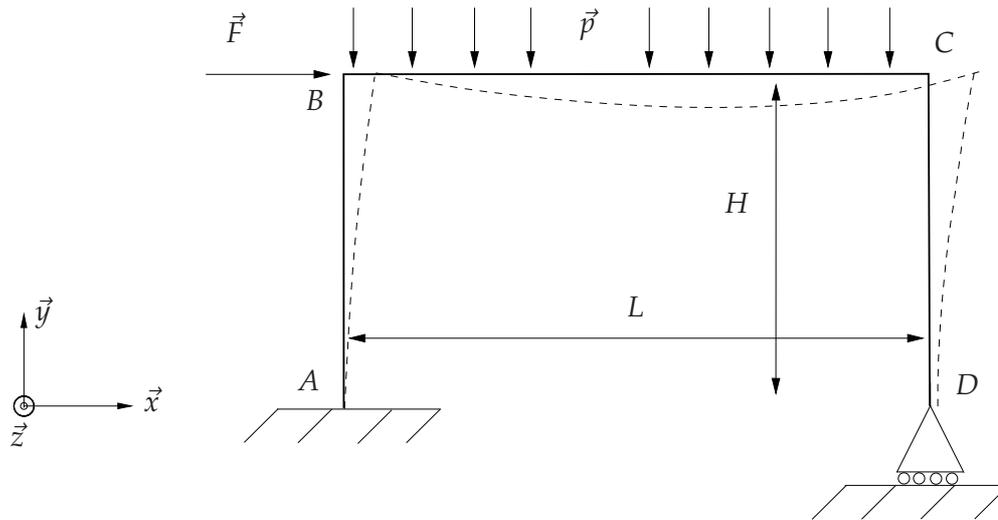


FIG. I.6: Portique encasté-appuyé chargé ponctuellement au point B et chargé de manière répartie sur le segment $[BC]$. L'allure de la déformée est en pointillés.

Comme la matrice I associée à la forme bilinéaire I_{Δ} (celle apparaissant dans l'équation I.16) est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthogonale et ses valeurs propres sont réelles. Ses valeurs propres sont les **moments quadratiques principaux**. Les vecteurs propres de cette matrice permettent de définir le **repère local principal**, noté $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. On peut définir ce repère local de la manière suivante : \vec{X} est le vecteur unitaire tangent à la fibre moyenne, tandis que \vec{Y} et \vec{Z} sont les vecteurs propres de la matrice apparaissant dans l'équation I.16, dans le plan orthogonal à \vec{X} . **Il faut bien noter qu'en général, le repère local principal $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ peut être différent du repère dans lequel on effectue les calculs de liaisons, appelé repère global.** L'intérêt de travailler dans le repère local principal permet de simplifier la plupart des écritures. **Dans toute la suite, nous noterons $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ le repère local principal, et I_X, I_Y et I_Z les moments quadratiques principaux (on a $I_{YZ} = 0$ dans le repère local principal). On notera $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère global.**

L'ensemble des résultats concernant la géométrie des sections planes étant présenté, nous pouvons développer un exemple illustrant l'application du PFS.

I.8 Le PFS sur un exemple

Pour illustrer tout ce qui vient d'être dit et la méthodologie qui devra être appliquée en TD, envisageons le portique encasté-appuyé représenté dans la figure I.6. Le portique, composée des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ est une poutre plane. Il est chargé ponctuellement au point B et chargé de manière répartie sur le segment $[BC]$. Nous supposons que le point A est l'origine du repère, et que la densité linéique de charge $\vec{p} = -p\vec{y}$ est constante ($p > 0$). Pour appliquer le principe fondamental de la statique, il convient de respecter les étapes suivantes :

1. orienter la poutre, et définir son abscisse curviligne s . On peut choisir une orientation

de A vers D . Ainsi, si G est un point courant du portique de coordonnées (x, y) :

$$\begin{cases} s = y \text{ sur le segment } [AB] \\ s = H + x \text{ sur le segment } [BC] \\ s = H + L + H - y = 2H + L - y \text{ sur le segment } [CD] \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

2. identifier la nature des liaisons, et écrire les torseurs associés. Nous avons ici une liaison encastrement en A , qui bloque la rotation autour de l'axe \vec{z} et les translations suivant \vec{x} et \vec{y} . Le torseur de liaison en A s'écrit donc :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{Bmatrix}_A \quad (\text{I.18})$$

La liaison en D est de type appui simple. Elle laisse libre la rotation autour de \vec{z} ainsi que la translation suivant \vec{x} , mais bloque la translation suivant \vec{y} . Le torseur de liaison D s'écrit donc :

$$\{\mathcal{T}_D^L\} = \begin{Bmatrix} Y_D \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \quad (\text{I.19})$$

Les inconnues du problème sont donc X_A , Y_A , M_A , et Y_D .

3. identifier les chargements, qu'ils soient ponctuels ou répartis. Nous avons ici un chargement ponctuel en B (de type force, sans moment appliqué), s'écrivant :

$$\{\mathcal{T}_B^C\} = \begin{Bmatrix} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \quad (\text{I.20})$$

car le moment d'une force est nul en son point d'application ($\vec{M}_{\vec{F},B} = \vec{B}\vec{B} \wedge \vec{F} = \vec{0}$). D'autre part, nous avons un effort réparti sur le segment $[BC]$. Un tronçon infinitésimal ds de poutre situé autour d'un point G appartenant à $[BC]$ et de coordonnées (x, y) subit un effort dont le torseur est :

$$d\{\mathcal{T}_G^C\} = \begin{Bmatrix} -pds \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \quad (\text{I.21})$$

car le point d'application de la force $-pds \vec{y}$ est G et qu'aucun moment n'est appliqué.

4. ramener tous les torseurs au même point (voir le résultat I.4.2). Le point choisi devra être "le plus particulier possible" (le plus souvent le centre de symétrie du système s'il en possède un). Dans notre cas, la structure est quelconque donc nous choisirons arbitrairement le point A ⁵. On a donc :

$$\{\mathcal{T}_D^L\} = \begin{Bmatrix} Y_D \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} Y_D \vec{y} \\ \vec{A}\vec{D} \wedge Y_D \vec{y} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} Y_D \vec{y} \\ L \vec{x} \wedge Y_D \vec{y} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} Y_D \vec{y} \\ LY_D \vec{z} \end{Bmatrix}_A \quad (\text{I.22})$$

$$\{\mathcal{T}_B^C\} = \begin{Bmatrix} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} F \vec{x} \\ \vec{A}\vec{B} \wedge F \vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F \vec{x} \\ H \vec{y} \wedge F \vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F \vec{x} \\ -FH \vec{z} \end{Bmatrix}_A \quad (\text{I.23})$$

⁵ici, c'est en A que l'expression du torseur de liaison est la plus compliquée. Choisir A permet de ne pas changer le point de ce torseur.

$$\begin{aligned}
 d\{\mathcal{T}_G^C\} &= \left\{ \begin{array}{c} -pds\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -pds\vec{y} \\ \vec{AG} \wedge (-pds\vec{y}) \end{array} \right\}_A \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -pds\vec{y} \\ (H\vec{y} + x\vec{x}) \wedge (-pds\vec{y}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -pds\vec{y} \\ -pxds\vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{I.24})
 \end{aligned}$$

Or, sur le segment [BC], nous avons $ds = dx$ car $s = H + x$, donc :

$$d\{\mathcal{T}_G^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -pdx\vec{y} \\ -pxdx\vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{I.25})$$

5. écrire effectivement le principe fondamental de la statique (équation I.10) :

$$\underbrace{\{\mathcal{T}_A^L\} + \{\mathcal{T}_D^L\}}_{\text{liaisons}} + \underbrace{\{\mathcal{T}_B^C\}}_{\text{chargement ponctuel}} + \underbrace{\int_B^C d\{\mathcal{T}_G^C\}}_{\text{chargement réparti}} = \{0\} \quad (\text{I.26})$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{c} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ M_A\vec{z} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} Y_D\vec{y} \\ LY_D\vec{z} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{x} \\ -FH\vec{z} \end{array} \right\}_A + \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \begin{array}{c} -pdx\vec{y} \\ -pxdx\vec{z} \end{array} \right\}_A = \{0\} \quad (\text{I.27})$$

En identifiant les composantes des résultantes et des moments, nous arrivons aux 3 équations indépendantes :

$$X_A + F = 0 \quad (\text{équation de résultante en } \vec{x}) \quad (\text{I.28})$$

$$Y_A + Y_D - pL = 0 \quad (\text{équation de résultante en } \vec{y}) \quad (\text{I.29})$$

$$M_A + LY_D - FH - p\frac{L^2}{2} = 0 \quad (\text{équation de moment en } \vec{z}) \quad (\text{I.30})$$

Il y a 3 équations et 4 inconnues donc le système est hyperstatique extérieurement de degré $4 - 3 = 1$.

Pour finir ce chapitre, on insistera sur la notation des torseurs employée dans ce cours : l'exposant L ou C indique s'il s'agit d'un torseur de liaison ou de chargement ; l'indice, quant à lui, indique le point de la liaison ou du chargement, **qui n'est pas forcément le même que le point d'écriture du torseur**. Si on considère par exemple l'équation :

$$\{\mathcal{T}_B^C\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{x} \\ -FH\vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{I.31})$$

il faut comprendre que l'on a un torseur de chargement (exposant C dans le terme de gauche), que ce chargement se fait au point B (indice B dans le membre de gauche), et que l'expression de ce torseur est ici donnée au point A (indice A dans le membre de droite).

Chapitre **II**

Efforts intérieurs

Sommaire

| | | |
|------|---|----|
| II.1 | Définitions | 16 |
| II.2 | Calcul pratique des efforts intérieurs | 17 |
| II.3 | Lien avec le tenseur des contraintes | 18 |
| II.4 | Equations d'équilibre sous forme locale | 19 |
| II.5 | Méthodologie sur un exemple | 21 |

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, comment écrire les équations d'équilibre permettant de connaître les inconnues de liaisons (pour le cas des systèmes isostatiques uniquement, nous traiterons le cas des systèmes hyperstatiques plus loin). Nous nous intéressons ici à l'expression des efforts intérieurs, et leur lien avec le tenseur des contraintes.

II.1 Définitions

Comme on le fait en MMC (Mécanique des Milieux Continus), on définit les efforts intérieurs en considérant les efforts exercés sur une partie du solide par la partie complémentaire. On introduit donc une **coupure** en un point courant G de la fibre moyenne. Étant donné que la poutre est orientée, cette coupure définit une partie amont (avant la coupure), que nous noterons (I), et une partie aval, que nous noterons (II) (voir figure II.1).

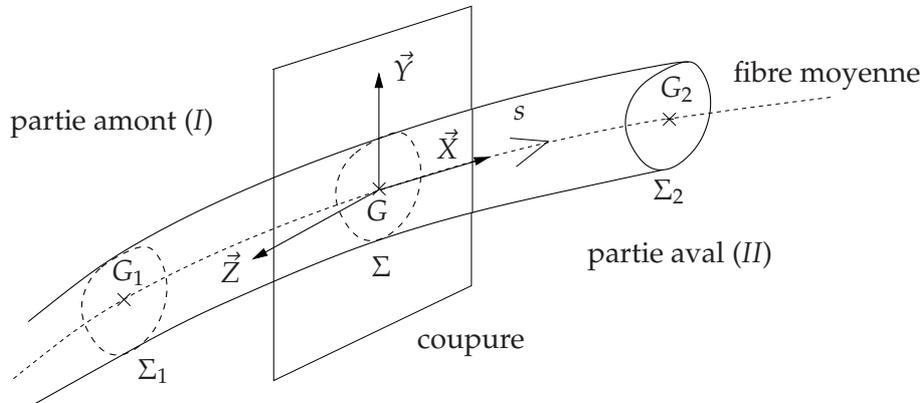


FIG. II.1: Coupure d'une poutre en un point G courant. $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est le repère local principal en G .

Nous sommes en mesure d'énoncer la

DÉFINITION II.1.1 : *Le tenseur des efforts intérieurs noté ici $\{\mathcal{T}_{int}\}$ en un point G de la fibre moyenne situé à l'abscisse curviligne s est le tenseur des efforts exercés par la partie aval (II) sur la partie amont (I), la coupure étant faite au point G :*

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \{\mathcal{T}_{(II) \rightarrow (I)}\} \quad (\text{II.1})$$

Pour toute valeur de l'abscisse curviligne s , la résultante et le moment du tenseur des efforts intérieurs peuvent être projetés dans le repère local principal $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. On peut ainsi introduire la

DÉFINITION II.1.2 : *Les efforts intérieurs $N(s)$, $T_Y(s)$, $T_Z(s)$, $M_X(s)$, $M_Y(s)$, $M_Z(s)$ sont les composantes des éléments du tenseur des efforts intérieurs dans le repère local principal, lorsque le tenseur est écrit au point courant G de la fibre moyenne :*

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{l} N(s)\vec{X} + T_Y(s)\vec{Y} + T_Z(s)\vec{Z} \\ M_X(s)\vec{X} + M_Y(s)\vec{Y} + M_Z(s)\vec{Z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{II.2})$$

Ces efforts sont appelés comme suit :

- $N(s)$ est l'**effort normal**,
- $T_Y(s)$ et $T_Z(s)$ sont les **efforts tranchants** suivant les directions \vec{Y} et \vec{Z} ,
- $M_X(s)$ est le **moment de torsion**,
- $M_Y(s)$ et $M_Z(s)$ sont les **moments fléchissants** suivant les directions \vec{Y} et \vec{Z} .

On insiste sur le fait que tous ces efforts dépendent en général de l'abscisse curviligne s . Sur le plan physique, les efforts intérieurs traduisent l'état de sollicitation **dans la structure**, contrairement aux réactions de liaisons. On notera pour les unités SI que $[N] = [T_Y] = [T_Z] = \text{N}$, tandis que $[M_X] = [M_Y] = [M_Z] = \text{N.m}$, à bien différencier de l'unité SI d'une contrainte σ ($[\sigma] = \text{Pa}$). Enfin, terminons cette section sur le point suivant : en pratique, pour calculer les efforts intérieurs, on ne revient jamais à la définition II.1.1. Il convient donc d'aborder une méthode d'obtention de ces efforts intérieurs.

II.2 Calcul pratique des efforts intérieurs

Une manière pratique de calculer les efforts intérieurs est d'appliquer le PFS aux deux parties (I) et (II). Commençons par la partie (I). (I) subit des efforts provenant de la partie (II) et de "tout l'extérieur sauf la partie (II)". Nous écrivons donc le PFS sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(II) \rightarrow (I)}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (I)}\} = \{0\} \quad (\text{II.3})$$

dans laquelle $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (I)}\}$ correspond aux torseurs de toutes les forces exercées sur (I) **sauf celles provenant de la partie (II)**. De même, l'équilibre de la partie (II) conduit à :

$$\{\mathcal{T}_{(I) \rightarrow (II)}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (II)}\} = \{0\} \quad (\text{II.4})$$

où $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (II)}\}$ correspond aux torseurs de toutes les forces exercées sur (II) **sauf celles provenant de la partie (I)**. En gardant à l'esprit que le principe d'action/réaction permet d'écrire que $\{\mathcal{T}_{(I) \rightarrow (II)}\} = -\{\mathcal{T}_{(II) \rightarrow (I)}\}$, on peut déduire des équations II.3 et II.4 le

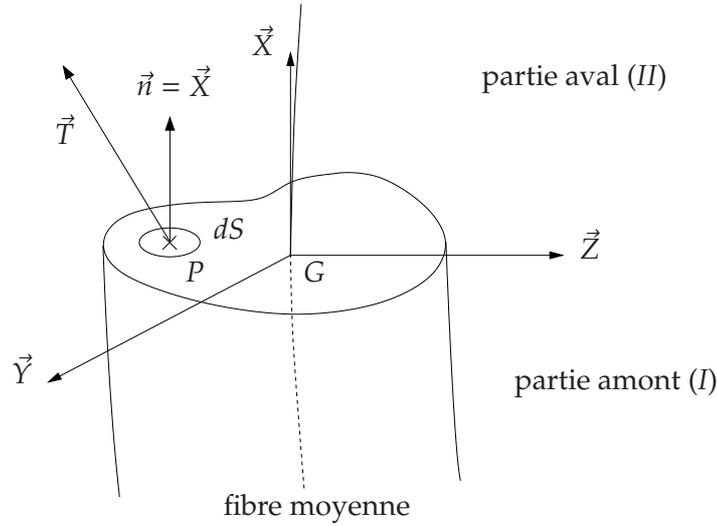
RÉSULTAT II.2.1 : *Le torseur des efforts intérieurs $\{\mathcal{T}_{int}\} = \{\mathcal{T}_{(II) \rightarrow (I)}\}$ peut se calculer à partir de la double égalité :*

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = -\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (I)}\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (II)}\} \quad (\text{II.5})$$

dans laquelle $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (I)}\}$ (respectivement $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (II)}\}$) correspond aux torseurs de toutes les forces exercées sur (I) (respectivement (II)) sauf celles provenant de la partie (II) (respectivement (I)). ■

L'intérêt de ce résultat est qu'il fournit 2 manières possibles pour calculer les efforts intérieurs. En pratique, on choisit la méthode pour laquelle les calculs sont les plus simples. Avant de présenter un exemple de mise en oeuvre du dernier résultat, nous allons d'abord voir comment le torseur des efforts intérieurs est lié au tenseur des contraintes¹.

¹pour éviter les foudres du professeur, on évitera de confondre le terme *torseur* et le terme *tenseur*.


 FIG. II.2: Section droite d'une poutre située à l'abscisse s .

II.3 Lien avec le tenseur des contraintes

On peut relier les efforts intérieurs en s au tenseur des contraintes sur la section droite Σ située en s . Pour ce faire, on introduit un point P courant de coordonnées (Y, Z) , et un élément infinitésimal de surface dS centré en P (voir figure II.2). Par définition, le vecteur contrainte $\vec{T}(P)$ est la force surfacique exercée par la partie aval sur l'élément dS , ramenée à dS :

$$\vec{T}(P) = \frac{d\vec{F}_{(II) \rightarrow dS}}{dS} \quad (\text{II.6})$$

Comme dS appartient à la partie (I), on peut alors déduire de la dernière équation la force élémentaire exercée par la partie (II) sur la partie (I) et le moment en G de cette force :

$$d\vec{F}_{(II) \rightarrow dS} = d\vec{F}_{(II) \rightarrow (I)} = \vec{T}(P)dS \quad (\text{II.7})$$

$$d\vec{M}_{(II) \rightarrow (I)} = \vec{G}P \wedge \vec{T}(P)dS \quad (\text{II.8})$$

Par intégration sur toute la surface Σ , on obtient la définition même des éléments du tenseur des efforts intérieurs :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \{\mathcal{T}_{(II) \rightarrow (I)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in \Sigma} \vec{T}(P)dS \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{G}P \wedge \vec{T}(P)dS \end{array} \right\}_G \quad (\text{II.9})$$

En introduisant la notation :

$$\sigma(P) = \begin{pmatrix} \sigma_{XX}(P) & \sigma_{XY}(P) & \sigma_{XZ}(P) \\ \sigma_{XY}(P) & \sigma_{YY}(P) & \sigma_{YZ}(P) \\ \sigma_{XZ}(P) & \sigma_{YZ}(P) & \sigma_{ZZ}(P) \end{pmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (\text{II.10})$$

et compte tenu du fait que $\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n}$ avec $\vec{n} = \vec{X}$, on obtient :

$$\vec{T}(P) = \sigma_{XX}(P)\vec{X} + \sigma_{XY}(P)\vec{Y} + \sigma_{XZ}(P)\vec{Z} \quad (\text{II.11})$$

D'autre part, le vecteur $\vec{G}\vec{P}$ s'écrit :

$$\vec{G}\vec{P} = Y\vec{Y} + Z\vec{Z} \quad (\text{II.12})$$

Ainsi, l'identification des équations II.2 et II.9 en tenant compte de II.11 conduit au

RÉSULTAT II.3.1 : *Les efforts intérieurs à l'abscisse curviligne s peuvent se déduire du tenseur des contraintes σ grâce aux relations d'intégration :*

$$N = \int_{\Sigma} \sigma_{XX} dS \quad ; \quad T_Y = \int_{\Sigma} \sigma_{XY} dS \quad ; \quad T_Z = \int_{\Sigma} \sigma_{XZ} dS \quad (\text{II.13})$$

$$M_X = \int_{\Sigma} (Y\sigma_{XZ} - Z\sigma_{XY}) dS \quad ; \quad M_Y = \int_{\Sigma} Z\sigma_{XX} dS \quad ; \quad M_Z = - \int_{\Sigma} Y\sigma_{XX} dS \quad (\text{II.14})$$

Comme nous l'avons énoncé dans le chapitre I, ces équations illustrent bien l'hypothèse de Saint-Venant : deux distributions de contraintes différentes peuvent conduire à deux torseurs d'efforts intérieurs identiques. Nous allons à présent réécrire l'équilibre de la structure sous une forme différente de celle vue au chapitre I.

II.4 Equations d'équilibre sous forme locale

Nous avons déjà traduit les conditions d'équilibre en fonction des inconnues de liaisons. Néanmoins, dans certains cas, il est utile d'avoir les équations d'équilibre sous forme différentielle locale. Avant de commencer, il convient de présenter quelques rappels concernant la dérivation du repère local principal. On peut montrer (ça n'est pas l'objet de ce cours), que les dérivées des vecteurs de base du repère local principal peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ -1/R & 0 & 1/T \\ 0 & -1/T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

où R est le **rayon de courbure** et T le **rayon de torsion**. Envisageons maintenant l'équilibre d'un tronçon ds de poutre, situé entre les points $G(s)$ et $G(s + ds)$, et éventuellement soumis à une densité linéique de chargement $\vec{p}(s)$ et une densité linéique de moment $\vec{m}(s)$. Notons $\vec{\mathcal{R}}$ la résultante du torseur des efforts intérieurs et $\vec{\mathcal{M}}$ son moment (voir figure II.3). Pour écrire le bilan des forces s'exerçant sur le tronçon ds , il faut bien prendre garde que pour la section située en $s - ds/2$, la normale sortante est $-\vec{X}$ (voir figure II.3) :

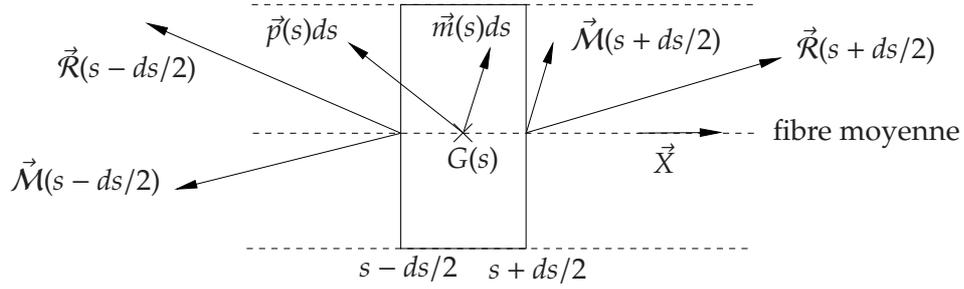
$$-\vec{\mathcal{R}}(s - ds/2) + \vec{\mathcal{R}}(s + ds/2) + \vec{p}(s)ds = \vec{0} \quad (\text{II.16})$$

soit, à l'ordre 1 et en ne notant plus la dépendance en s :

$$\frac{d\vec{\mathcal{R}}}{ds} + \vec{p} = \vec{0} \quad (\text{II.17})$$

De même, l'équilibre des moments au point G s'écrit, à l'ordre 1 :

$$-\vec{\mathcal{M}}(s - ds/2) + \vec{\mathcal{M}}(s + ds/2) + \vec{m}(s)ds + \left(-\frac{ds}{2}\vec{X}\right) \wedge (-\vec{\mathcal{R}}(s)) + \left(\frac{ds}{2}\vec{X}\right) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) = \vec{0} \quad (\text{II.18})$$


 FIG. II.3: Equilibre d'un tronçon de poutre ds .

soit finalement :

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{m} + \vec{X} \wedge \vec{R} = \vec{0} \quad (\text{II.19})$$

REMARQUE II.4.1 : Il ne fallait pas prendre l'équation des moments naïvement à partir de la figure II.3, soit :

$$-\vec{M}(s - ds/2) + \vec{M}(s + ds/2) + \vec{m}(s)ds + \left(-\frac{ds}{2}\vec{X}\right) \wedge (-\vec{R}(s - ds/2)) + \left(\frac{ds}{2}\vec{X}\right) \wedge (\vec{R}(s + ds/2)) = \vec{0} \quad (\text{II.20})$$

car les deux derniers termes du membre de gauche contiennent de l'ordre 1 (en ds) et de l'ordre 2 (en ds^2), négligeable devant ds . On prend donc $\vec{R}(s + ds/2) \approx \vec{R}(s - ds/2) \approx \vec{R}(s)$. ■

Pour résumer ce qui vient d'être dit, nous sommes à présent en mesure d'énoncer le

RÉSULTAT II.4.1 : *Les équations d'équilibre sous forme locale s'écrivent :*

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p} = \vec{0} \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{m} + \vec{X} \wedge \vec{R} = \vec{0} \quad (\text{II.22})$$

avec \vec{R} et \vec{M} la résultante et le moment du torseur des efforts intérieurs. ■

Il est intéressant, pour pouvoir l'appliquer en pratique, de simplifier ces dernières équations dans le cas d'une poutre plane chargée dans son plan :

$$\frac{1}{T} = 0, \quad p_Z = 0, \quad m_X = 0, \quad m_Y = 0, \quad T_Z = 0, \quad M_X = 0, \quad M_Y = 0 \quad (\text{II.23})$$

Nous avons alors :

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p} = \frac{d}{ds} (N\vec{X} + T_Y\vec{Y}) + \vec{p} = \frac{dN}{ds}\vec{X} + N\frac{d\vec{X}}{ds} + \frac{dT_Y}{ds}\vec{Y} + T_Y\frac{d\vec{Y}}{ds} + \vec{p} \quad (\text{II.24})$$

car il ne faut pas oublier de dériver les vecteurs de bases. Compte tenu de l'expression des dérivées des vecteurs de bases (voir l'équation II.15) et des relations II.23, on obtient :

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p} = \frac{dN}{ds}\vec{X} + N\frac{\vec{Y}}{R} + \frac{dT_Y}{ds}\vec{Y} - T_Y\frac{\vec{X}}{R} + \vec{p} = \vec{0} \quad (\text{II.25})$$

Pour l'équation de moment, on a cette fois :

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{m} + \vec{X} \wedge \vec{R} = \frac{d(M_Z \vec{Z})}{ds} + m_z \vec{Z} + \vec{X} \wedge (N \vec{X} + T_Y \vec{Y}) = \vec{0} \quad (\text{II.26})$$

soit, toujours avec les équations II.15 et II.23 :

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{m} + \vec{X} \wedge \vec{R} = \frac{dM_Z}{ds} \vec{Z} + m_z \vec{Z} + T_Y \vec{Z} = \vec{0} \quad (\text{II.27})$$

Finalement, en projetant les équations II.25 et II.27 sur les trois directions $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, on obtient donc les **équations d'équilibre pour une poutre plane chargée dans son plan** :

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_Y}{R} + p_X = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{dT_Y}{ds} + \frac{N}{R} + p_Y = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{dM_Z}{ds} + T_Y + m_Z = 0 \quad (\text{II.30})$$

Comme pour le chapitre I, nous allons à présent illustrer les résultats de ce chapitre sur un exemple.

II.5 Méthodologie sur un exemple

Pour illustrer tout ce qui vient d'être dit et la méthodologie qui devra être appliquée en TD, envisageons une poutre plane articulée-appuyée représentée dans la figure II.4.

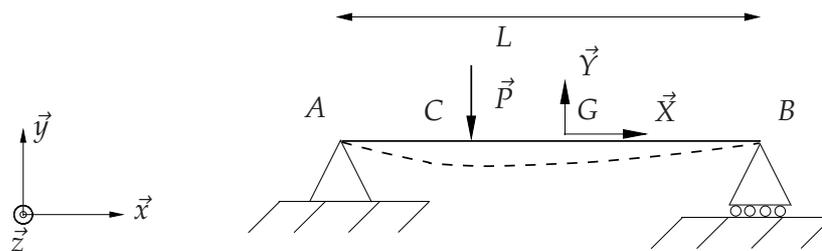


FIG. II.4: Poutre articulée-appuyée chargée ponctuellement au point C. L'allure de la déformée est en pointillés.

Nous supposons que le point A est l'origine du repère, et que $AC = \alpha L$. Reprenons et complétons la méthodologie exposée dans le chapitre I :

1. on oriente la poutre de A vers B, son abscisse curviligne s est donc égale à x , abscisse d'un point courant G de la fibre moyenne.
2. on identifie la nature des liaisons, et on écrit les torseurs associés. Nous avons ici une liaison rotule plane en A, qui bloque les translations suivant \vec{x} et \vec{y} . Le torseur de liaison

en A s'écrit donc :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad (\text{II.31})$$

La liaison en B est de type appui simple. Elle laisse libre la rotation autour de \vec{z} ainsi que la translation suivant \vec{x} , mais bloque la translation suivant \vec{y} . Le torseur de liaison en B s'écrit donc :

$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad (\text{II.32})$$

Les inconnues du problème sont donc X_A , Y_A , et Y_B .

3. on identifie ensuite les chargements, qu'ils soient ponctuels ou répartis. Nous avons ici uniquement un chargement ponctuel en C , s'écrivant :

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C \quad (\text{II.33})$$

4. on ramène tous les torseurs au même point, A par exemple. On a donc :

$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{AB} \wedge Y_B \vec{y} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ L \vec{x} \wedge Y_B \vec{y} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ LY_B \vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{II.34})$$

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \vec{AC} \wedge (-P \vec{y}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \alpha L \vec{x} \wedge (-P \vec{y}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ -\alpha LP \vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{II.35})$$

5. on écrit le principe fondamental de la statique (équation I.10) :

$$\underbrace{\{\mathcal{T}_A^L\} + \{\mathcal{T}_B^L\}}_{\text{liaisons}} + \underbrace{\{\mathcal{T}_C^C\}}_{\text{chargement ponctuel}} = \{0\} \quad (\text{II.36})$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ LY_B \vec{z} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ -\alpha LP \vec{z} \end{array} \right\}_A = \{0\} \quad (\text{II.37})$$

En identifiant les composantes des résultantes et des moments, nous arrivons aux 3 équations indépendantes :

$$X_A = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$Y_A + Y_B - P = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$LY_B - \alpha LP = 0 \quad (\text{II.40})$$

qui permettent de déterminer toutes les inconnues :

$$X_A = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$Y_A = P(1 - \alpha) \quad (\text{II.42})$$

$$Y_B = \alpha P \quad (\text{II.43})$$

Il y a 3 équations et 3 inconnues donc le système est isostatique extérieurement.

6. Introduisons une coupure de la poutre en un point G d'abscisse curviligne x . Pour calculer les efforts intérieurs, il faut considérer les cas où G appartient à $[AC]$ ou à $[CB]$, car le fait de franchir le point C change le nombre de torseurs à considérer à gauche et à droite du point G .

❶ tronçon $[AC]$, soit $x \in [0, \alpha L]$ (voir figure II.5)

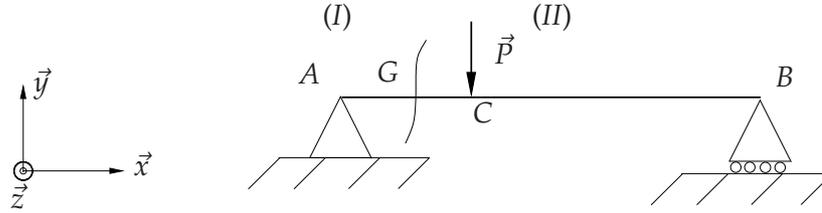


FIG. II.5: Coupure au point G scindant la poutre en une partie amont (I) et une partie aval (II).

Il y a un torseur à gauche de G (celui associé à la liaison en A) et deux torseurs à droite (chargement en C et liaison en B). Il semble donc habile d'utiliser la relation :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = -\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (I)}\} = -\{\mathcal{T}_A^L\} \quad (\text{II.44})$$

Il faut alors mettre en G l'opposé du torseur de la liaison située en A :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = - \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{GA} \wedge (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y}) \\ -x \vec{x} \end{array} \right\}_G = - \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ -x Y_A \vec{z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{II.45})$$

et enfin, **ne pas oublier de projeter dans le repère local principal**, même si dans le cas étudié ici le repère local principal et le repère global coïncident :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} -X_A \vec{X} - Y_A \vec{Y} \\ x Y_A \vec{Z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} P(\alpha - 1) \vec{Y} \\ x P(1 - \alpha) \vec{Z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{II.46})$$

Par identification, nous déduisons les efforts intérieurs :

$$N(x) = 0, \quad T_Y(x) = P(\alpha - 1), \quad M_Z(x) = xP(1 - \alpha) \quad (\text{II.47})$$

les autres efforts intérieurs étant forcément nuls car la poutre est plane. A ce stade, on peut vérifier que les équations d'équilibre sont bien vérifiées (voir les équations II.28, II.29, et II.30) :

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_Y}{R} + p_X = 0, \quad \text{car } R = +\infty \text{ et } p_X = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$\frac{dT_Y}{ds} + \frac{N}{R} + p_Y = 0, \quad \text{car } R = +\infty, T_Y \text{ est constant, et } p_Y = 0 \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{dM_Z}{ds} + T_Y + m_Z = \frac{dM_Z}{dx} + T_Y = P(1 - \alpha) + P(\alpha - 1) = 0 \quad (\text{II.50})$$

Celles-ci n'apportent rien de plus sur le plan physique ; elle permettent juste de "confirmer" que le résultat trouvé est correct.

❷ tronçon $[CB]$, soit $x \in [\alpha L, L]$. Il y a maintenant deux torseurs à gauche de G (celui

associé à la liaison en A et au chargement en C) et un torseur à droite (liaison en B). Il semble donc habile d'utiliser cette fois la relation :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (II)}\} = \{\mathcal{T}_B^L\} \quad (\text{II.51})$$

Il faut alors mettre en G le torseur de la liaison située en B :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \underbrace{\vec{GB}}_{(L-x)\vec{x}} \wedge (Y_B \vec{y}) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ (L-x)Y_B \vec{z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{II.52})$$

et enfin, projeter dans le repère local principal :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{Y} \\ (L-x)Y_B \vec{Z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \alpha P \vec{Y} \\ (L-x)\alpha P \vec{Z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{II.53})$$

Par identification, nous déduisons les efforts intérieurs :

$$N(x) = 0, \quad T_Y(x) = \alpha P, \quad M_Z(x) = (L-x)\alpha P \quad (\text{II.54})$$

Là encore, les équations d'équilibre sont bien vérifiées. Il est coutûmier de représenter graphiquement les efforts intérieurs sous forme d'un ou plusieurs diagrammes, comme dans la figure II.6.

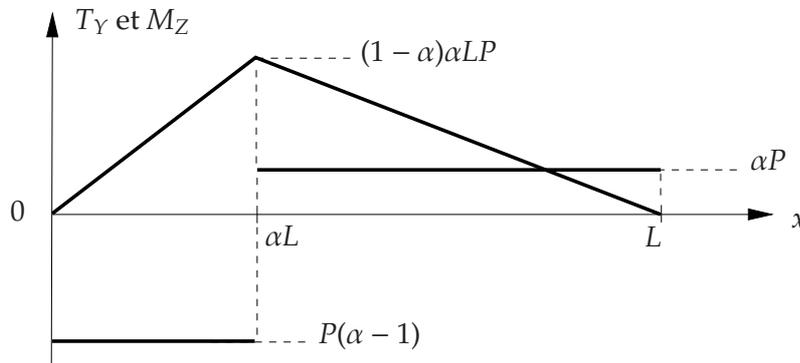


FIG. II.6: Représentation schématique des efforts intérieurs en fonction de l'abscisse curviligne.

On note que l'effort tranchant est discontinu tandis que le moment fléchissant est continu. Pour finir, insistons sur les deux pièges dans lesquels ils ne faut pas tomber : **il faut impérativement écrire le torseur des efforts intérieurs en un point G courant de la poutre, et penser à projeter ces efforts dans le repère local principal.**

Chapitre **III**

Etude des déplacements

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| III.1 Rappels succincts de MMC | 26 |
| III.1.1 Déformations | 26 |
| III.1.2 Energie et loi de comportement | 27 |
| III.1.3 Théorème d'intégration du champ de déformation | 28 |
| III.1.4 Méthode d'obtention du champ de contrainte | 29 |
| III.2 Etude de l'effort normal | 29 |
| III.2.1 Poutre de section rectangulaire | 29 |
| III.2.2 Poutre de section quelconque | 31 |
| III.2.3 Synthèse de la méthode | 32 |
| III.3 Etude du moment de flexion | 32 |
| III.3.1 Poutre de section rectangulaire | 32 |
| III.3.2 Poutre de section quelconque | 33 |
| III.4 Etude de la torsion (poutre cylindrique de révolution) | 33 |
| III.5 Etude de l'effort tranchant | 35 |
| III.6 Sollicitations combinées : formules de Bresse | 35 |

III.1 Rappels succincts de MMC

III.1.1 Déformations

Nous allons à présent exposer quelques rappels et notations sur le tenseur des petites déformations. Considérons un domaine élémentaire dV situé autour d'un point P d'un milieu continu. Dans ce paragraphe, on se place dans un repère quelconque $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Notons P_0 , de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , ce point à la configuration de référence et P_1 , de coordonnées (x_1, y_1, z_1) , en position actuelle. Introduisons encore un second point, Q , infiniment voisin de P , dont les coordonnées sont $x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz$. Le point Q est un point courant de dV , et le vecteur $\vec{P_0Q_0}$ permet de repérer l'orientation de dV par rapport aux axes du repère (voir figure III.1).

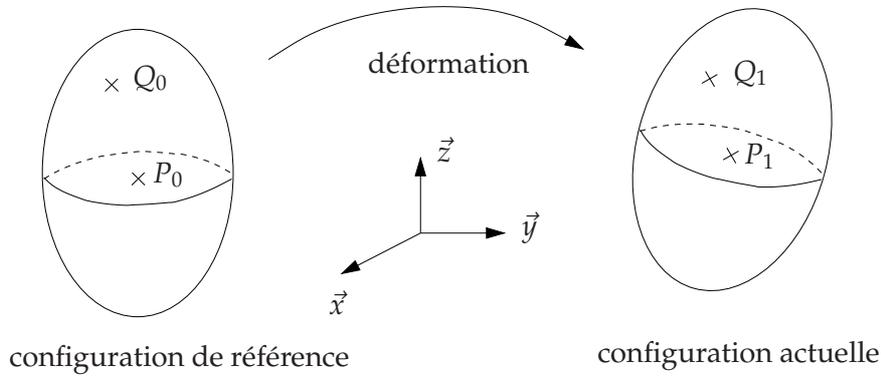


FIG. III.1: Élément de volume infinitésimal soumis à une déformation.

Le vecteur déplacement $P_0\vec{P}_1 = (u, v, w)$ en P autour de sa configuration de référence est donné par :

$$u = x_1 - x_0, \quad v = y_1 - y_0, \quad w = z_1 - z_0 \quad (\text{III.1})$$

et le vecteur déplacement de Q , noté $Q_0\vec{Q}_1$, vaut :

$$Q_0\vec{Q}_1 = (u + du, v + dv, w + dw) \quad (\text{III.2})$$

Par un développement de Taylor à l'ordre 1, on peut écrire que¹ :

$$Q_0\vec{Q}_1 = P_0\vec{P}_1 + \mathbf{grad}(P_0\vec{P}_1) \cdot dP_0\vec{P}_1 \quad (\text{III.3})$$

avec :

$$\mathbf{grad}(P_0\vec{P}_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

¹ne pas être effrayé par la formule. Sur le plan philosophique, ce n'est qu'une généralisation en 3D de $f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx$

On peut alors scinder ce tenseur d'ordre 2 en une partie symétrique ε , et une partie anti-symétrique ω :

$$\mathit{grad}(P_0\vec{P}_1) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathit{grad}(P_0\vec{P}_1) + \mathit{grad}^T(P_0\vec{P}_1))}_{\varepsilon} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathit{grad}(P_0\vec{P}_1) - \mathit{grad}^T(P_0\vec{P}_1))}_{\omega} \quad (\text{III.5})$$

où T est le symbole de transposition. On peut ainsi réécrire l'équation III.3 sous la forme :

$$Q_0\vec{Q}_1 = P_0\vec{P}_1 + \varepsilon.dP_0\vec{P}_1 + \omega.dP_0\vec{P}_1 = P_0\vec{P}_1 + \varepsilon.dP_0\vec{P}_1 + \vec{\omega} \wedge dP_0\vec{P}_1 \quad (\text{III.6})$$

dans laquelle $\vec{\omega}$ est le **vecteur adjoint** au tenseur antisymétrique² ω , défini par :

$$2\omega = \begin{cases} w_{,y} - v_{,z} \\ u_{,z} - w_{,x} \\ v_{,x} - u_{,y} \end{cases} = \vec{\text{rot}}P_0\vec{P}_1 \quad (\text{III.7})$$

Pour interpréter physiquement l'équation III.6 en considérant les cas suivants :

- $\omega = \varepsilon = 0$. Il reste $Q_0\vec{Q}_1 = P_0\vec{P}_1$, et donc tous les points Q de dV subissent le même déplacement (de translation).
- $\varepsilon = 0$ et $P_0\vec{P}_1 = \vec{0}$. Il reste $Q_0\vec{Q}_1 = \vec{\omega} \wedge dP_0\vec{P}_1$, et donc tous les points Q de dV subissent une rotation de $\|\vec{\omega}\|$ autour de l'axe porté par $\vec{\omega}$ (car $\|\vec{\omega}\| \ll 1$).
- $\omega = 0$ et $P_0\vec{P}_1 = \vec{0}$. Il reste $Q_0\vec{Q}_1 = \varepsilon.dP_0\vec{P}_1$, ce qui correspond à une déformation pure de dV puisque les termes précédents définissent son déplacement (translation et rotation).

En combinant tout ce qui vient d'être dit, nous pouvons énoncer le :

RÉSULTAT III.1.1 : *Au cours d'une déformation d'un milieu continu, un volume élémentaire dV centré en P_0 dans la configuration de référence et en P_1 dans la configuration actuelle subit :*

- *une translation de vecteur $P_0\vec{P}_1$ (qui est le déplacement $\vec{\xi}$ du point P),*
- *une rotation d'axe $\vec{\omega}$, d'angle $\|\vec{\omega}\|$ autour de P avec $2\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}P_0\vec{P}_1$,*
- *une déformation pure caractérisée par le tenseur symétrique ε :*

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathit{grad}(P_0\vec{P}_1) + \mathit{grad}^T(P_0\vec{P}_1)) \quad (\text{III.8})$$

Ce résultat nous permettra de bien comprendre les déplacements des sections droites dûs aux efforts intérieurs. Abordons maintenant quelques rappels concernant le tenseur des contraintes.

III.1.2 Energie et loi de comportement

La **loi de comportement** est le lien entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ε . On se limite ici à l'**élasticité linéaire**, pour laquelle la **loi de Hooke** s'écrit :

$$\sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon)\mathbf{1} + 2\mu\varepsilon \quad (\text{III.9})$$

²ce vecteur adjoint est défini par $\omega.\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ pour tout vecteur \vec{v}

où λ et μ sont les **paramètres de Lamé**. On peut bien entendu inverser cette relation et exprimer ε en fonction de σ :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}Tr(\sigma)\mathbf{1} \quad (III.10)$$

où cette fois E et ν sont respectivement le **module de Young et le coefficient de Poisson**. Il faut bien comprendre que l'élasticité linéaire est caractérisée par deux paramètres caractéristiques du matériau seulement. Par suite, connaître le couple (E, ν) ou le couple (λ, μ) est équivalent, car on peut passer de l'un à l'autre via les formules :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (III.11)$$

Notons que μ est souvent noté G et s'appelle **module de cisaillement**. Les contraintes provoquant au sein du solide des déformations, le solide emmagasine ainsi une énergie de déformation W appelée **énergie potentielle élastique**. Cette dernière est définie par sa densité volumique :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_{XX}\varepsilon_{XX} + \sigma_{YY}\varepsilon_{YY} + \sigma_{ZZ}\varepsilon_{ZZ} + 2\sigma_{XY}\varepsilon_{XY} + 2\sigma_{XZ}\varepsilon_{XZ} + 2\sigma_{YZ}\varepsilon_{YZ}) \quad (III.12)$$

où nous avons projeté σ et ε dans le repère local principal $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

III.1.3 Théorème d'intégration du champ de déformation

Pour résoudre un problème de MMC (c'est à dire trouver le déplacement $\vec{\xi}$, les déformations ε et les contraintes σ), on peut adopter deux stratégies : la résolution en déplacement ou la résolution en contrainte. Très schématiquement, la résolution en déplacement s'appuie sur une expression "inventée" du déplacement $\vec{\xi}$, que l'on soumet aux équations de Navier (équations d'équilibres traduites en terme de déplacement). On déduit ensuite les déformations ε et les contraintes σ . Pour la résolution en contrainte, on soumet une forme "inventée" de tenseur des contraintes aux équations d'équilibre, pour ensuite en déduire les déformations et le déplacement. Les deux méthodes semblent analogues, mais il existe une différence fondamentale entre elles : pour une résolution en déplacement, on peut déduire ε et σ par dérivation, comme le montre la chaîne de calculs symbolique :

$$\vec{\xi} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \varepsilon \xrightarrow{\text{Hooke}} \sigma \quad (III.13)$$

Le fait de dériver ne pose pas de problème. En revanche, pour la résolution en contrainte, ε se déduit de σ par intégration d'un système différentiel, dont la solution exige la vérification de certaines conditions :

$$\sigma \xrightarrow{\text{Hooke}} \varepsilon \xrightarrow{\int} \vec{\xi} \quad (III.14)$$

Ces conditions font l'objet du

RÉSULTAT III.1.2 : L'équation $2\varepsilon = \text{grad}\vec{\xi} + \text{grad}^T \vec{\xi}$ pour ε donné admet une solution en $\vec{\xi}$ si les équations de compatibilité cinématique sont satisfaites :

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ik} = 0, \quad \forall i, j = 1..3, \text{ somme en } k \quad (\text{III.15})$$

Si le matériau vérifie la loi de Hooke et est soumis à une densité volumique de force \vec{f} , on peut réécrire ces équations à l'aide du tenseur des contraintes, ce qui constitue les équations de Beltrami :

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu}f_{k,k}\delta_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1..3, \text{ somme en } k \quad (\text{III.16})$$

Les conditions de compatibilité cinématique (ou de Beltrami) sont les conditions d'existence du champ $\vec{\xi}$ pour ε donné. Il faut les vérifier quand on adopte une résolution en contrainte.

III.1.4 Méthode d'obtention du champ de contrainte

Revenons à la RDM et évoquons les équations générales qui régissent le tenseur des contraintes (nous développerons ici une approche en contrainte en précisant la méthodologie, mais pas tous les calculs). Le champ de contraintes doit donc vérifier :

- ❶ l'équation d'équilibre $\text{div}\vec{\sigma} = 0$ (on néglige ici les forces volumiques, soit $\vec{f} = 0$).
- ❷ les équations de Beltrami III.16 (puisqu'on fait une résolution en contrainte)
- les conditions limites qui seront de deux types : (i) ❸ les conditions limites sur le tour d'une section droite Σ indiquant que le bord de la poutre est libre de contraintes, et (ii) ❹ les conditions de résultantes indiquant que l'intégrale des composantes du tenseur des contraintes doivent coïncider avec les efforts intérieurs (voir le résultat II.3.1).

Résoudre complètement le système proposé n'est pas l'objet de ce cours. Nous allons détailler les calculs dans le cas de l'effort normal pour bien marquer la méthodologie, mais nous passerons les calculs pour les autres cas.

III.2 Etude de l'effort normal

III.2.1 Poutre de section rectangulaire

Envisageons une poutre de section rectangulaire sollicitée de telle sorte que les efforts intérieurs se réduisent à de l'effort normal $N = F$ (voir figure III.2). Cherchons une solu-

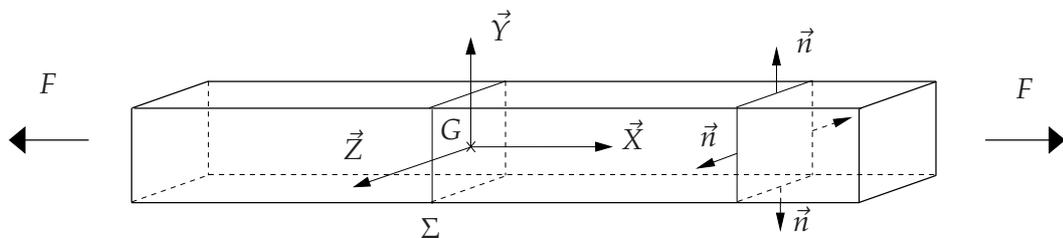


FIG. III.2: Poutre de section carrée soumise à une traction simple.

tion en contrainte sous la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{XX}(X, Y, Z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Les conditions limites **3** s'écrivent $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ avec \vec{n} la normale au contour de Σ ($\vec{n} = \vec{Y}$ ou \vec{Z}). Comme \vec{n} n'a pas de composantes sur \vec{X} , elles sont donc trivialement vérifiées. L'équation d'équilibre **1** impose :

$$\frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial X} = 0 \Rightarrow \sigma_{XX} = \sigma_{XX}(Y, Z) \quad (\text{III.18})$$

Les équations de Beltrami **2**, compte tenu de $\sigma_{kk} = \sigma_{XX}$ (somme en k) impliquent que (on écrit ces équations sous forme de matrice pour i et j variant de 1 à 3, voir l'équation III.16) :

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\nu} \begin{pmatrix} \sigma_{XX,XX} & \sigma_{XX,XY} & \sigma_{XX,XZ} \\ \sigma_{XX,YX} & \sigma_{XX,YY} & \sigma_{XX,YZ} \\ \sigma_{XX,ZX} & \sigma_{XX,ZY} & \sigma_{XX,ZZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{XX}}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{XX}}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{XX}}{\partial Y \partial Z} = 0 \Rightarrow \sigma_{XX} = a + bY + cZ \quad (\text{III.20})$$

Pour obtenir la valeur des constantes a , b , et c , on applique les conditions limites **4** :

$$N = \int_{\Sigma} \sigma_{XX} dY dZ = a \underbrace{\int_{\Sigma} dY dZ}_S + b \underbrace{\int_{\Sigma} Y dY dZ}_{=0} + c \underbrace{\int_{\Sigma} Z dY dZ}_{=0} \quad (\text{III.21})$$

$$M_Y = 0 = \int_{\Sigma} Z \sigma_{XX} dY dZ = a \underbrace{\int_{\Sigma} Z dY dZ}_{=0} + b \underbrace{\int_{\Sigma} ZY dY dZ}_{=I_{YZ}=0} + c \underbrace{\int_{\Sigma} Z^2 dY dZ}_{=I_Y} \quad (\text{III.22})$$

$$-M_Z = 0 = \int_{\Sigma} Y \sigma_{XX} dY dZ = a \underbrace{\int_{\Sigma} Y dY dZ}_{=0} + b \underbrace{\int_{\Sigma} Y^2 dY dZ}_{=I_Z} + c \underbrace{\int_{\Sigma} YZ dY dZ}_{=I_{YZ}=0} \quad (\text{III.23})$$

(le terme I_{YZ} est nul car on est dans le repère local principal) ce qui conduit à :

$$a = \frac{N}{S}, \quad b = c = 0, \quad \text{et donc} \quad \sigma_{XX} = \frac{N}{S} \quad (\text{III.24})$$

La loi de Hooke nous permet alors d'obtenir l'expression du tenseur ε :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{N}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu N}{ES} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu N}{ES} \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Le champ de déplacement (u, v, w) vérifie donc le système (voir l'équation III.8) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X} &= \frac{N}{ES}, & \frac{\partial v}{\partial Y} &= -\frac{\nu N}{ES}, & \frac{\partial w}{\partial Z} &= -\frac{\nu N}{ES}, \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

qui s'intègre assez facilement sous la forme :

$$u = \frac{N}{ES}X + \phi_X(Y, Z), \quad v = -\frac{\nu N}{ES}Y + \phi_Y(X, Z), \quad w = -\frac{\nu N}{ES}Z + \phi_Z(X, Y) \quad (\text{III.27})$$

avec $\vec{\phi}$ un **champ de moment** quelconque. Le vecteur $\vec{\phi}$ rend compte d'un mouvement d'ensemble (translation et rotation). On peut prendre $\vec{\phi}$ nul si on considère que le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est entraîné dans ce mouvement d'ensemble. Si on considère un point $P_0(X, Y, Z)$ devenant P_1 sous l'effet des sollicitations, nous avons donc, d'après la section III.1.1 :

$$P_0\vec{P}_1 = \left[\frac{N}{ES}X \quad -\frac{\nu N}{ES}Y \quad -\frac{\nu N}{ES}Z \right] \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} P_0\vec{P}_1 = \vec{0} \quad (\text{III.28})$$

On peut donc dire que l'effort normal est la source d'une translation pure des sections planes Σ , car le terme de rotation est nul. Pour finir, écrivons que l'énergie potentielle stockée dans un tronçon dX de poutre est ici égale à :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon dV = \frac{1}{2} \sigma_{XX} \varepsilon_{XX} dV = \frac{1}{2} \frac{N}{S} \frac{N}{ES} S dX \quad (\text{III.29})$$

d'où, pour toute la poutre :

$$W = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES} dX \quad (\text{III.30})$$

III.2.2 Poutre de section quelconque

Nous venons de caractériser la répartition des contraintes dans le cas d'une poutre droite de section constante en traction (ou compression) pure. Généraliser ce résultat au cas d'une poutre de section quelconque est un travail qui sort du cadre de ce cours, et nous allons admettre que les résultats vus pour la section carrée restent vrais pour une section quelconque. Par conséquent, si Σ et Σ' sont des sections droites situées respectivement à l'abscisse curviligne s et $s + ds$, énonçons le

RÉSULTAT III.2.1 : *Si le seul effort intérieur non nul est l'effort normal N , alors*

– *la seule composante non nulle du tenseur des contraintes dans le repère local principal est σ_{XX} , donné par*

$$\sigma_{XX} = \frac{N}{S} \quad (\text{III.31})$$

– *On déduit que les composantes non nulles du tenseur des déformations sont :*

$$\varepsilon_{XX} = \frac{N}{ES}, \quad \varepsilon_{YY} = \varepsilon_{ZZ} = -\nu \varepsilon_{XX} = -\frac{\nu N}{ES} \quad (\text{III.32})$$

– *le déplacement de Σ' par rapport à Σ est une translation de vecteur $d\vec{\Lambda}$ donné par :*

$$d\vec{\Lambda} = \frac{N}{ES} ds \vec{X} \quad (\text{III.33})$$

– *l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le tronçon ds est :*

$$dW = \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES} ds \quad (\text{III.34})$$

Notons que l'équation III.33 peut être vue comme une différentiation de III.28 pour le centre de gravité G de Σ , pour lequel on a $Y = Z = 0$.

III.2.3 Synthèse de la méthode

Nous avons mis en exergue (dans le cas de l'effort normal) la méthodologie qui permet de résoudre totalement le problème mécanique :

1. calculer le champ de contrainte σ en vérifiant les conditions ❶, ❷, ❸, et ❹.
2. en déduire le champ de déformation ε en appliquant la loi de Hooke.
3. en déduire le champ de déplacement $\vec{\xi}$ par intégration de ε (la solution existe forcément car σ vérifie les équations de Beltrami).
4. calculer l'énergie potentielle W emmagasinée dans la poutre.

La méthodologie étant présentée, il convient désormais de traiter le cas de tous les autres efforts intérieurs. Là encore, pour éviter la présentation de résultats qui sortiraient d'une introduction à la théorie des poutres, les calculs sont omis et on ne présente que les résultats clés.

III.3 Etude du moment de flexion

III.3.1 Poutre de section rectangulaire

En étudiant une poutre identique à celle représentée dans la figure III.2, mais sollicitée maintenant en flexion autour de l'axe \vec{Z} , on peut montrer que l'on a désormais :

$$P_0 \vec{P}_1 = \left[-\frac{M_Z}{EI_Z} XY \quad \frac{M_Z}{2EI_Z} (X^2 + \nu(Y^2 - Z^2)) \quad \frac{\nu M_Z}{EI_Z} YZ \right] \quad (\text{III.35})$$

(on rappelle que I_Z est le moment quadratique principal autour de \vec{Z}) et :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} P_0 \vec{P}_1 = \left[\frac{\nu M_Z}{EI_Z} Z \quad 0 \quad \frac{M_Z}{EI_Z} X \right] \quad (\text{III.36})$$

Ainsi, pour une poutre en flexion pure, un tronçon ds de centre G (caractérisé par $Y = Z = 0$) subit une translation suivant \vec{Y} de norme :

$$v_G = \frac{M_Z}{2EI_Z} X^2 \quad (\text{III.37})$$

et une rotation ω autour de \vec{Z} :

$$\omega = \frac{M_Z}{EI_Z} X = \frac{dv_G}{dX} \quad (\text{III.38})$$

L'hypothèse de Navier-Bernoulli est donc vérifiée puisqu'une section droite Σ reste orthogonale à la fibre moyenne pendant le mouvement. Une représentation schématique de la flèche $v(X)$ et de la rotation $\omega(X)$ pour une poutre encastree et soumise à une flexion est donnée dans la figure III.3. Soulignons enfin que la courbure est liée au moment de flexion par :

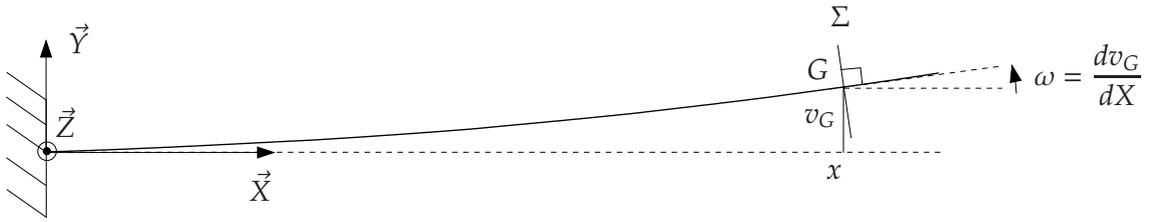


FIG. III.3: Poutre plane encastée soumise à une flexion.

$$\frac{d\omega}{dX} = \frac{d^2v_G}{dX^2} = \frac{M_Z}{EI_Z} \quad (\text{III.39})$$

Pour finir, l'énergie de flexion emmagasinée dans la poutre vaut

$$dW = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{2} \frac{M_Z^2}{EI_Z} dX \quad (\text{III.40})$$

III.3.2 Poutre de section quelconque

Comme nous l'avons fait pour l'effort normal, nous étendons ici les résultats obtenus pour une poutre droite de section Σ à une poutre de section quelconque. Pour tout tronçon ds situé entre Σ (abscisse curviligne s) et Σ' (abscisse curviligne $s + ds$), on peut donc retenir le

RÉSULTAT III.3.1 : Si $\vec{M} = M_Y \vec{Y} + M_Z \vec{Z}$, moment de flexion, est le seul effort intérieur non nul, alors

– la seule composante non nulle du tenseur des contraintes dans le repère local principal est σ_{XX} , donnée par

$$\sigma_{XX} = -\frac{M_Z}{I_Z} Y + \frac{M_Y}{I_Y} Z \quad (\text{III.41})$$

– On déduit que les composantes non nulles du tenseur des déformations sont :

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\sigma_{XX}}{E}, \quad \varepsilon_{YY} = \varepsilon_{ZZ} = -\nu \varepsilon_{XX} \quad (\text{III.42})$$

– le déplacement de Σ' par rapport à Σ est une rotation de vecteur $d\vec{\omega}$ donné par :

$$d\vec{\omega} = d\vec{\omega}_Y + d\vec{\omega}_Z = \frac{M_Y}{EI_Y} ds \vec{Y} + \frac{M_Z}{EI_Z} ds \vec{Z} \quad (\text{III.43})$$

– l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le tronçon ds est :

$$dW = \left(\frac{1}{2} \frac{M_Y^2}{EI_Y} + \frac{1}{2} \frac{M_Z^2}{EI_Z} \right) ds \quad (\text{III.44})$$

III.4 Etude de la torsion (poutre cylindrique de révolution)

On considère maintenant la torsion d'une poutre cylindrique de révolution (voir figure III.4). On admettra que l'on a désormais :

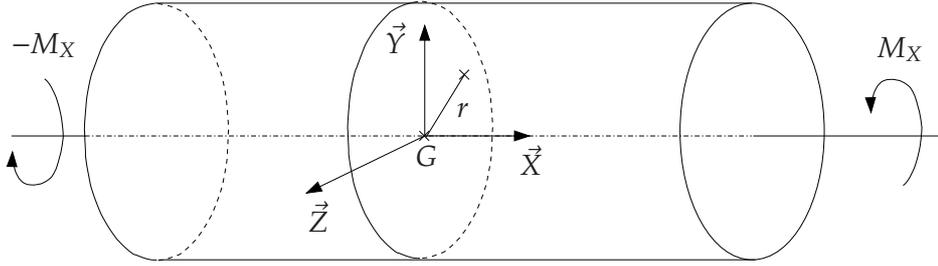


FIG. III.4: Poutre circulaire soumise à une sollicitation de torsion.

$$P_0 \vec{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{M_X r X}{GI_X} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

avec $r = Y^2 + Z^2$, et :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} P_0 \vec{P}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{M_X}{2GI_X} r & 0 & \frac{M_X}{GI_X} X \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

où G est le module de cisaillement. Si la poutre n'est pas de révolution, il convient de remplacer I_X par J , coefficient géométrique dont l'expression est difficilement accessible de manière analytique. La résolution du problème de RDM associé à une poutre de section quelconque sollicitée en torsion est trop complexe pour être abordée (même évoquée !) dans ce cours. Donnons simplement quelques éléments qui illustrent cette complexité. On peut montrer que dans le cas le plus général, le champ de déplacement (u, v, w) a la forme :

$$u = \frac{1}{G} \Phi(Y, Z), \quad v = -\frac{M_X}{GJ} XZ, \quad w = -\frac{M_X}{GJ} XY \quad (\text{III.47})$$

où ❶ on remarquera que le moment quadratique I_X a été remplacé par le coefficient géométrique J , et ❷ $\Phi(Y, Z)$ est la **fonction de gauchissement**, qui est non linéaire. Cette fonction traduit un **couplage** entre le déplacement u suivant \vec{X} et les coordonnées d'espace Y et Z . Cela signifie que les points d'une section droite peuvent se déplacer suivant l'axe \vec{X} . Le gauchissement est une notion délicate à modéliser, si bien que nous n'en dirons pas plus dans ce cours.

Si on se limite, pour simplifier, au cas d'une poutre cylindrique de révolution, on peut retenir que la résolution complète du problème de RDM est possible. Ainsi on admettra les expressions des champs de contrainte et de déformations ainsi que l'énergie regroupées dans le

RÉSULTAT III.4.1 : Si M_X , moment de torsion, est le seul effort intérieur non nul, et si la poutre sollicitée est cylindrique de révolution, alors

– la seule composante non nulle du tenseur des contraintes dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{X})$ est $\sigma_{X\theta}$, donnée par

$$\sigma_{X\theta} = \frac{M_X}{I_X} r \quad (\text{III.48})$$

– On déduit que la seule composante non nulle du tenseur des déformations est :

$$\varepsilon_{X\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{X\theta} \quad (\text{III.49})$$

– le déplacement de Σ' par rapport à Σ est une rotation de vecteur $d\vec{\omega}$ donné par :

$$d\vec{\omega} = \frac{M_X}{GI_X} ds \vec{X} \quad (\text{III.50})$$

– l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le tronçon ds est :

$$dW = \frac{1}{2} \frac{M_X^2}{GI_X} ds \quad (\text{III.51})$$

III.5 Etude de l'effort tranchant

La résolution complète est encore plus complexe que les précédentes. Sans rentrer dans les détails, on fait appel au **théorème de la coupure**, qui permet d'élaborer une théorie approchée de l'effort tranchant. D'autre part, nous verrons que dans la pratique, les déplacements dus à l'effort tranchant sont très petits devant les autres, ce qui n'encourage pas l'élaboration de théories fines destinées à la description de ce type d'effort intérieur. En rappelant que Σ et Σ' sont les deux sections droites situées aux abscisses curvilignes s et $s + ds$, nous admettrons simplement ici le

RÉSULTAT III.5.1 : Si $\vec{T} = T_Y \vec{Y} + T_Z \vec{Z}$, **effort tranchant**, est le seul effort intérieur non nul, alors

– le déplacement de Σ' par rapport à Σ est une translation de vecteur $d\vec{\Lambda}$ donné par :

$$d\vec{\Lambda} = k_Y \frac{T_Y}{GS} ds \vec{Y} + k_Z \frac{T_Z}{GS} ds \vec{Z} \quad (\text{III.52})$$

– l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le tronçon ds est :

$$dW = \left(\frac{1}{2} k_Y \frac{T_Y^2}{GS} + \frac{1}{2} k_Z \frac{T_Z^2}{GS} \right) ds \quad (\text{III.53})$$

Dans ce résultat, k_Y et k_Z sont les **coefficients de section réduite**. Ils sont déduits de la théorie approchée de l'effort tranchant, et on peut montrer qu'il valent par exemple 6/5 pour une section rectangulaire, et 10/9 pour une section circulaire. Il est temps de résumer ce qui vient d'être dit dans deux formules clés : les formules de Bresse.

III.6 Sollicitations combinées : formules de Bresse

Dans les sections précédentes, nous avons présenté séparément les contraintes, déformations, déplacements et énergies liés à chacune des quatre sollicitations simples : effort normal, moment fléchissant, moment de torsion et effort tranchant. Nous examinons maintenant le cas général où chaque section droite est soumise aux quatre types de sollicitations³. On

³il est possible de combiner tous ces effets grâce au principe de superposition, valable ici du fait de la linéarité des équations.

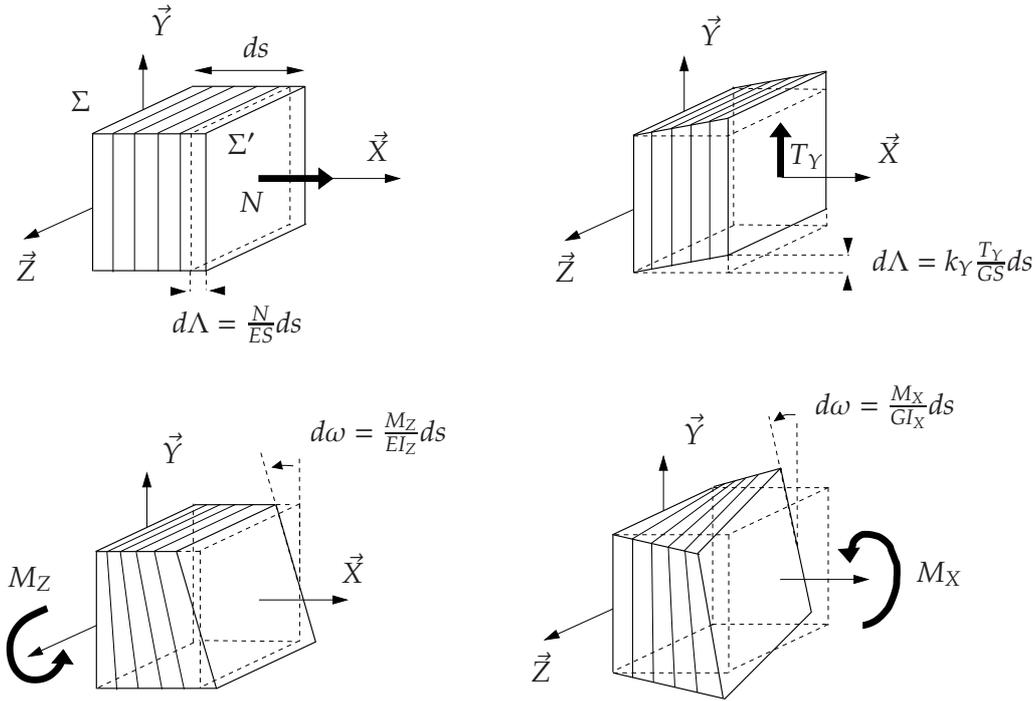


FIG. III.5: Représentation schématique des quatre formes d'efforts intérieurs.

considère donc un tronçon de poutre d'épaisseur ds compris entre les sections droites $\Sigma(s)$ et $\Sigma'(s + ds)$. Imaginons que cette tranche soit décomposée en feuillets infiniment minces, voir figure III.5.

- Sous l'action de l'effort normal N , tous les feuillets voient leur épaisseur multipliée uniformément par $(1 + \varepsilon_{XX})$, avec $\varepsilon_{XX} = \frac{N}{ES}$. Σ' subit (par rapport à Σ) une translation parallèle à l'axe longitudinal, de vecteur directeur :

$$d\vec{\Lambda} = \frac{N}{ES} ds \vec{X} \quad (\text{III.54})$$

- Sous l'action de l'effort tranchant T_Y , les feuillets glissent les uns sur les autres, parallèlement à $G\vec{Y}$. Σ' subit (par rapport à Σ) une translation parallèle à $G\vec{Y}$ de vecteur directeur :

$$d\vec{\Lambda} = k_Y \frac{T_Y}{GS} ds \vec{Y} \quad (\text{pour } T_Z : d\vec{\Lambda} = k_Z \frac{T_Z}{GS} ds \vec{Z}) \quad (\text{III.55})$$

- Sous l'action du moment fléchissant M_Z , les feuillets tournent les uns par rapport aux autres, autour d'axes parallèles à $G\vec{Z}$, ce qui a pour effet de comprimer certaines parties et de tendre les autres. Σ' subit (par rapport à Σ) une rotation de vecteur :

$$d\vec{\omega} = \frac{M_Z}{EI_Z} ds \vec{Z} \quad (\text{pour } M_Y : d\vec{\omega} = \frac{M_Y}{EI_Y} ds \vec{Y}) \quad (\text{III.56})$$

- Sous l'action du moment de torsion M_X , les feuillets tournent les uns par rapport aux autres autour de l'axe $G\vec{X}$. Σ' subit (par rapport à Σ) une rotation de vecteur :

$$d\vec{\omega} = \frac{M_X}{GJ} ds \vec{X} \quad (J = I_X \text{ pour une poutre cylindrique de révolution}) \quad (\text{III.57})$$

On peut “regrouper” toutes ces observations dans des équations uniques, en considérant 3 sections Σ_1 située en s_1 et centrée en G_1 , Σ_2 située en s_2 et centrée en G_2 (avec $s_1 \leq s_2$), et Σ en s centrée en G (avec $s_1 \leq s \leq s_2$). On note $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}, \vec{\omega}_2$ les rotations et $\vec{\Lambda}_1, \vec{\Lambda}, \vec{\Lambda}_2$ les translations des sections Σ_1, Σ , et Σ_2 .

Notons maintenant que le mouvement de Σ_2 par rapport à Σ_1 résulte de deux contributions : **❶** un mouvement d’ensemble dû à la rotation de Σ_1 (si Σ_1 se déplace, elle entraîne tout le tronçon $\Sigma_1\Sigma_2$ avec elle), et **❷** un mouvement dû à la déformation de la poutre. Commençons par **❶** : on admettra ici qu’un déplacement d’ensemble peut être défini par un **torseur de déplacement**

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_1 \\ \vec{\Lambda}_1 \end{array} \right\}_{G_1} \quad (\text{III.58})$$

si bien qu’on aura, d’après la formule de changement de point :

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\Lambda}_2 = \vec{\Lambda}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge G_1\vec{G}_2 \quad (\text{III.59})$$

On notera que le torseur des déplacements introduit ici n’a rien à voir avec le torseur des efforts intérieurs. Pour le terme **❷**, notons qu’un tronçon ds situé autour du point G lui même situé en s subit une rotation $d\vec{\omega}$ telle que :

$$\frac{d\vec{\omega}}{ds} = \frac{M_Y}{EI_Y}\vec{Y} + \frac{M_Z}{EI_Z}\vec{Z} + \frac{M_X}{GJ}\vec{X} \quad (\text{III.60})$$

ce qui va induire une translation de G_2 telle que :

$$\frac{d\vec{\Lambda}_2}{ds} = \underbrace{\frac{N}{ES}\vec{X} + k_Y\frac{T_Y}{GS}\vec{Y} + k_Z\frac{T_Z}{GS}\vec{Z}}_{\frac{d\vec{\Lambda}}{ds}} + \underbrace{\left(\frac{M_Y}{EI_Y}\vec{Y} + \frac{M_Z}{EI_Z}\vec{Z} + \frac{M_X}{GJ}\vec{X}\right)}_{\frac{d\vec{\omega}}{ds}} \wedge G\vec{G}_2 \quad (\text{III.61})$$

En regroupant toutes ces équations pour une poutre cylindrique de révolution ($J = I_X$), et en intégrant sur tout le tronçon de poutre $\Sigma_1\Sigma_2$, on peut donc énoncer le

RÉSULTAT III.6.1 : *Les formules de Bresse relient les translations et les rotations de deux sections droites Σ_1 et Σ_2 par :*

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{M_Y}{EI_Y}\vec{Y} + \frac{M_Z}{EI_Z}\vec{Z} + \frac{M_X}{GI_X}\vec{X} \right) ds \quad (\text{III.62})$$

$$\vec{\Lambda}_2 = \vec{\Lambda}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge G_1\vec{G}_2 + \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{N}{ES}\vec{X} + k_Y\frac{T_Y}{GS}\vec{Y} + k_Z\frac{T_Z}{GS}\vec{Z} \right) ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[\left(\frac{M_Y}{EI_Y}\vec{Y} + \frac{M_Z}{EI_Z}\vec{Z} + \frac{M_X}{GI_X}\vec{X} \right) \wedge G\vec{G}_2 \right] ds \quad (\text{III.63})$$

On se souviendra que le terme de torsion exige que la poutre soit cylindrique de révolution. ■

Ces équations sont très utiles en pratique : elles permettent le calcul de $\vec{\omega}_2$ et $\vec{\Lambda}_2$ lorsque les efforts intérieurs et $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\Lambda}_1$ sont connus. Elles permettent aussi, dans certains cas, de calculer les inconnues hyperstatiques figurant dans les expressions des composantes de $\{\mathcal{T}_{int}\}$ lorsque l'on connaît $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ ou/et $\vec{\Lambda}_1, \vec{\Lambda}_2$.

De manière analogue, on peut également regrouper toutes les contributions de l'énergie vues dans ce chapitre en énonçant le

RÉSULTAT III.6.2 : *L'énergie emmagasinée par la poutre entre les sections Σ_1 et Σ_2 est donnée par :*

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{N^2}{ES} + k_Y \frac{T_Y^2}{GS} + k_Z \frac{T_Z^2}{GS} + \frac{M_Y^2}{EI_Y} + \frac{M_Z^2}{EI_Z} + \frac{M_X^2}{GI_X} \right) ds \quad (\text{III.64})$$

Nous appliquerons les formules de Bresse sur un exemple qui sera présenté à la fin du chapitre IV. Pour finir ce chapitre, il est important de souligner qu'en pratique, la contribution des efforts tranchants T_Y et T_Z dans la déformation de la poutre est petite devant celles dues à l'effort normal et aux moments de flexion/torsion. Par conséquent, on pourra retenir **qu'il est coutûmier de négliger la contribution due aux efforts tranchants T_Y et T_Z dans les formules de Bresse et dans le calcul de l'énergie W .**

Chapitre IV

Energétique des structures

Sommaire

| | | |
|------|---------------------------------------|----|
| IV.1 | Notion de degrés de liberté | 40 |
| IV.2 | Théorème de Castigliano | 41 |
| IV.3 | Théorème de Ménabréa | 42 |
| IV.4 | Exemple | 43 |

Nous avons vu comment calculer les déplacements et rotations des surfaces planes à partir des efforts intérieurs. Très souvent, on peut compléter la résolution d'un problème de RDM par quelques résultats concernant l'énergie emmagasinée dans la structure. Cette énergie permet, via la dualité entre force et déplacement, de calculer certains déplacements ou forces lorsque les formules de Bresse sont lourdes à appliquer.

IV.1 Notion de degrés de liberté

Considérons une structure isostatique ou hyperstatique liée à un bâti. Appliquons à cette structure un chargement progressif qui l'amène de l'état d'équilibre initial (0) à l'état d'équilibre final (1). En faisant l'hypothèse que les liaisons ne peuvent ni dissiper ni emmagasiner de l'énergie, le travail T fourni par les forces extérieures se convertit **intégralement** en énergie potentielle élastique W emmagasinée dans la structure. On a alors :

$$W = T \quad (\text{IV.1})$$

Supposons que les forces extérieures données sont ponctuelles et que le comportement de la structure est linéaire. Les forces extérieures données passent progressivement de zéro aux valeurs finales F_i . Soit :

- \vec{n}_i le vecteur unitaire d'un axe portant F_i ($i = 1, 2, \dots, n$).
- F_i la mesure algébrique de \vec{F}_i sur cet axe
- q_i le déplacement algébrique de P_i , point d'application de \vec{F}_i , suivant \vec{n}_i .

Compte tenu des hypothèses, les déplacements sont des fonctions linéaires homogènes des F_i et on peut écrire :

$$q_i = C_{ij}F_j \quad (\text{IV.2})$$

où C_{ij} sont les **coefficients de souplesse ou d'influence**. Ces coefficients dépendent des sens, directions et points d'application des \vec{F}_i , mais pas de leur intensité. Calculons le travail T de ces forces extérieures : soit ρF_i les valeurs des forces extérieures données dans un état intermédiaire entre (0) et (1), avec $0 \leq \rho \leq 1$. En passant des valeurs ρF_i aux valeurs $(\rho + d\rho)F_i$, on a un déplacement des points d'applications P_i des forces égal à $(\rho + d\rho)q_i - \rho q_i = d\rho q_i$. Le travail dT correspondant est donc $dT = F_i q_i d\rho$. Par intégration pour $\rho \in [0; 1]$, on obtient :

$$T = \frac{1}{2}F_i q_i = \frac{1}{2}C_{ij}F_i F_j = \frac{1}{2}[F_1 \quad \dots \quad F_n]C \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Nous venons de raisonner sur des forces ponctuelles et des translations subies par leur point d'application. Tous les résultats demeurent valables si F_i désigne un moment appliqué sur une partie P_i de la structure et q_i la rotation de P_i autour de l'axe du moment. On dit alors que F_i sont les **forces généralisées** et q_i les **déplacements généralisés**. L'inverse de la matrice de souplesse C est la **matrice de raideur ou de rigidité**, notée K , et vérifiant :

$$F_i = K_{ij}q_j \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}F_i q_i = \frac{1}{2}K_{ij}q_i q_j = \frac{1}{2}[q_1 \quad \dots \quad q_n]K \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

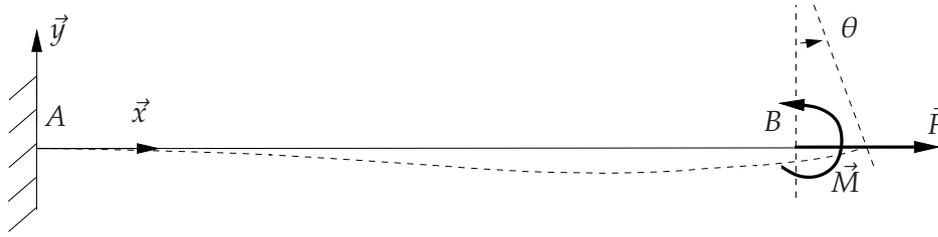


FIG. IV.1: Poutre encastée-libre sollicitée en traction/flexion. L'allure de la déformée est en pointillés.

IV.2 Théorème de Castigliano

Le théorème de Castigliano exprime la dualité des déplacements q_i et des forces F_i . Il s'énonce simplement :

THÉORÈME IV.2.1 : (de Castigliano) : *Les déplacements q_i peuvent être calculés par :*

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.5})$$

si W est exprimée en fonction des F_i uniquement. Réciproquement, les forces F_i sont données par :

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.6})$$

si W est exprimée en fonction des q_i uniquement. ■

Ce théorème est d'un intérêt fondamental, car il permet le calcul d'un déplacement généralisé ou d'une force généralisée si on connaît son dual. Pour clarifier les notions présentées dans tout le début de ce chapitre, présentons le cas d'une poutre AB encastée-libre sollicitée en traction/flexion à son extrémité B par une force $\vec{F} = F_x \vec{x}$ et un moment $\vec{M} = M \vec{z}$ (voir figure IV.1). Nous laissons le soin au lecteur de montrer que les efforts intérieurs sont donnés par (on prendra un repère local principal identique au repère global) :

$$N(x) = F_x, \quad T_Y(x) = 0, \quad M_Z(x) = M \quad (\text{IV.7})$$

L'énergie stockée dans la structure s'écrit donc (voir l'équation III.64) :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{F_x^2}{ES} + \frac{M^2}{EI_Z} \right) dx = \frac{F_x^2 L}{2ES} + \frac{M^2 L}{2EI_Z} \quad (\text{IV.8})$$

Notons u_x le déplacement horizontal de B (associé à l'effort F_x), et θ la rotation de la section droite située en B , associée à M . On peut déduire du théorème de Castigliano :

$$u_x = \frac{\partial W}{\partial F_x} = \frac{F_x L}{ES}, \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{ML}{EI_Z} \quad (\text{IV.9})$$

Ces résultats peuvent encore s'écrire sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ \theta \end{pmatrix}}_{q_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{ES} & 0 \\ 0 & \frac{L}{EI_z} \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} F_x \\ M \end{pmatrix}}_{F_i} \quad (\text{IV.10})$$

dans laquelle on identifie le vecteur des déplacements généralisés q_i , la matrice de souplesse C , et le vecteur des forces généralisées F_i . On remarquera que l'égalité :

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} F_i F_j \quad (\text{IV.11})$$

est bien vérifiée. Nous allons maintenant aborder le deuxième grand théorème de l'énergétique des structures, qui va nous permettre de résoudre le cas des structures hyperstatiques.

IV.3 Théorème de Ménabréa

Soit une structure S hyperstatique de degré n , soumise à des forces extérieures F_1, F_2, \dots, F_m . Nous avons vu que les équations d'équilibre permettent d'exprimer toutes les réactions de liaisons en fonction du chargement et de n d'entre elles, dites **réactions hyperstatiques**, notées par exemple R_1, R_2, \dots, R_n . Chacune de ces réactions est associée à un degré de liberté qu'elle bloque au niveau de son point d'application. On peut alors énoncer la

DÉFINITION IV.3.1 : *Le système isostatique équivalent est obtenu en libérant les n degrés de liberté associés aux n réactions hyperstatiques R_i , et en considérant que ces réactions hyperstatiques sont des forces extérieures ne travaillant pas.* ■

L'intérêt de cette structure isostatique équivalente est illustré par l'énoncé du

THÉORÈME IV.3.1 : *(de Ménabréa) : il s'agit de l'application du théorème de Castigliano à la structure isostatique équivalente : l'énergie potentielle élastique W de la structure isostatique équivalente étant exprimée en fonction des forces extérieures F_i ($i = 1, \dots, m$) et des réactions hyperstatiques R_i ($i = 1, \dots, n$), on a :*

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.12})$$

Ce théorème, qui traduit que les déplacements généralisés associés aux réactions hyperstatiques sont nuls, fournit ainsi les n équations supplémentaires qui permettent de lever l'hyperstaticité. On déduit la méthodologie permettant de calculer totalement une structure hyperstatique :

1. écrire les équations d'équilibre, et identifier le degré d'hyperstaticité n
2. choisir n réactions de liaisons R_i , et **exprimer toutes les autres en fonction de celles-ci**
3. toujours en fonction des R_i , calculer les efforts intérieurs
4. en déduire l'énergie totale W emmagasinée dans la poutre

5. appliquer le théorème de Ménabréa pour obtenir n équations supplémentaires
6. résoudre totalement les équations.

IV.4 Exemple

Considérons la poutre encastree-appuyee representee dans la figure IV.2, chargee en un point C par une force ponctuelle $\vec{P} = -P\vec{y}$, avec $P \geq 0$. On se propose ici de resoudre completement le probleme de RDM pose, et de chercher le point d'application C (donc la valeur de α) tel que son deplacement vertical soit le plus important. On notera $I = I_Z$ le moment quadratique autour de l'axe \vec{Z} .

1. orienter la poutre, et definir son abscisse curviligne s . On peut choisir une orientation de A vers B. Ainsi l'abscisse curviligne s coincide avec x , position d'un point courant G appartenant a la fibre moyenne.
2. identifier la nature des liaisons, et ecrire les torseurs associes. Nous avons ici une liaison encastrement en A, qui bloque la rotation autour de l'axe \vec{z} et les translations suivant \vec{x} et \vec{y} . Le torseur de liaison en A s'ecrit donc :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ M_A\vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{IV.13})$$

La liaison en B est de type appui simple. Elle laisse libre la rotation autour de \vec{z} ainsi que la translation suivant \vec{x} , mais bloque la translation suivant \vec{y} . Le torseur de liaison B s'ecrit donc :

$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad (\text{IV.14})$$

Les inconnues du probleme sont donc X_A , Y_A , M_A , et Y_B .

3. identifier les chargements, qu'ils soient ponctuels ou repartis. Nous avons ici un chargement ponctuel en C, s'ecrivant :

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -P\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C \quad (\text{IV.15})$$

car $\vec{M}_{\vec{P},C} = \vec{CC} \wedge \vec{P} = \vec{0}$.

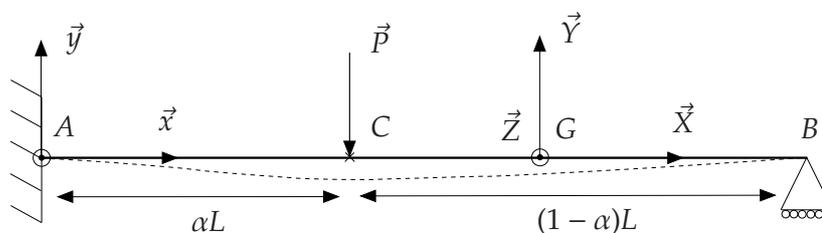


FIG. IV.2: Poutre encastree-appuyee chargee ponctuellement en un point de sa fibre moyenne. L'allure de la deformee est representee en pointilles.

4. ramener tous les torseurs au même point (voir le résultat I.4.1). On choisit ici arbitrairement le point A. On a donc :

$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{AB} \wedge Y_B \vec{y} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ L\vec{x} \wedge Y_B \vec{y} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ LY_B \vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{IV.16})$$

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \vec{AC} \wedge (-P \vec{y}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \alpha L \vec{x} \wedge (-P \vec{y}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ -P \alpha L \vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{IV.17})$$

5. écrire effectivement le principe fondamental de la statique (equation I.10) :

$$\underbrace{\{\mathcal{T}_A^L\} + \{\mathcal{T}_B^L\}}_{\text{liaisons}} + \underbrace{\{\mathcal{T}_C^C\}}_{\text{chargement ponctuel}} = \{0\} \quad (\text{IV.18})$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ LY_B \vec{z} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ -P \alpha L \vec{z} \end{array} \right\}_A = \{0\} \quad (\text{IV.19})$$

En identifiant les composantes des résultantes et des moments, nous arrivons aux 3 équations indépendantes :

$$X_A = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$Y_A + Y_B - P = 0 \quad (\text{IV.21})$$

$$M_A + LY_B - \alpha LP = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Il y a 3 équations et 4 inconnues donc le système est hyperstatique extérieurement de degré $4 - 3 = 1$.

6. Choisissons pour inconnue hyperstatique Y_B , que nous noterons désormais X , et exprimons toutes les inconnues en fonction de X :

$$X_A = 0 \quad (\text{IV.23})$$

$$Y_A = P - X \quad (\text{IV.24})$$

$$M_A = \alpha LP - LX \quad (\text{IV.25})$$

7. calculons les efforts intérieurs, on considérant les deux cas suivants.

❶ tronçon $[AC]$, soit $x \in [0, \alpha L]$. On peut utiliser la relation :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = -\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (I)}\} = -\{\mathcal{T}_A^L\} \quad (\text{IV.26})$$

Il faut alors mettre en G l'opposé du torseur de la liaison située en A :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = - \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} + \underbrace{\vec{GA}}_{-x\vec{x}} \wedge (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y}) \end{array} \right\}_G = - \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ (M_A - xY_A) \vec{z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{IV.27})$$

et enfin, **ne pas oublier de projeter dans le repère local principal**, même si dans le cas étudié ici les repères local et global coïncident :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} -X_A \vec{X} - Y_A \vec{Y} \\ (xY_A - M_A) \vec{Z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} (X - P) \vec{Y} \\ (x(P - X) - (\alpha LP - LX)) \vec{Z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{IV.28})$$

Par identification, nous déduisons les efforts intérieurs :

$$N(x) = 0, \quad T_Y(x) = X - P, \quad M_Z(x) = P(x - \alpha L) + X(L - x) \quad (\text{IV.29})$$

les autres efforts intérieurs étant forcément nuls car la poutre est plane. A ce stade, on peut vérifier que les équations d'équilibre sont bien vérifiées (voir les équations II.28, II.29, et II.30) :

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_Y}{R} + p_X = 0, \quad \text{car } R = +\infty \text{ et } p_X = 0 \quad (\text{IV.30})$$

$$\frac{dT_Y}{ds} + \frac{N}{R} + p_Y = 0, \quad \text{car } R = +\infty, T_Y \text{ est constant, et } p_Y = 0 \quad (\text{IV.31})$$

$$\frac{dM_Z}{ds} + T_Y + m_Z = \frac{dM_Z}{dx} + T_Y = P - X + X - P = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Ces équations "confirment" que le résultat trouvé semble correct.

② tronçon $[CB]$, soit $x \in [\alpha L, L]$. On peut cette fois utiliser la relation :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow (II)}\} = \{\mathcal{T}_B^L\} \quad (\text{IV.33})$$

Il faut alors mettre en G le torseur de la liaison située en B :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \underbrace{\vec{GB}}_{(L-x)\vec{x}} \wedge (Y_B \vec{y}) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ (L-x) Y_B \vec{z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{IV.34})$$

et enfin, projeter dans le repère local principal :

$$\{\mathcal{T}_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{Y} \\ (L-x) Y_B \vec{Z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} X \vec{Y} \\ (L-x) X \vec{Z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{IV.35})$$

Par identification, nous déduisons les efforts intérieurs :

$$N(x) = 0, \quad T_Y(x) = X, \quad M_Z(x) = (L - x)X \quad (\text{IV.36})$$

et les équations d'équilibre sont là encore vérifiées.

8. nous sommes désormais en mesure de calculer l'énergie W emmagasinée dans la poutre. **Pour ce calcul, on négligera la contribution due à l'effort tranchant.** Comme l'effort normal N est identiquement nul, on retiendra donc que :

$$W \approx \frac{1}{2} \int_A^B \frac{M_Z^2}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \int_0^{\alpha L} [P(x - \alpha L) + X(L - x)]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{\alpha L}^L [(L - x)X]^2 dx \quad (\text{IV.37})$$

soit

$$W = \frac{L^3 (P(P + X)\alpha^3 - 3PX\alpha^2 + X^2)}{6EI} \quad (\text{IV.38})$$

9. construisons le système isostatique équivalent. Remarquons que la réaction hyperstatique $X = Y_B$ bloque la translation verticale de B . Nous allons donc libérer cette translation et considérer que X est un effort extérieur ne travaillant pas (voir figure IV.3). Le théorème de Ménabréa permet d'écrire l'équation :

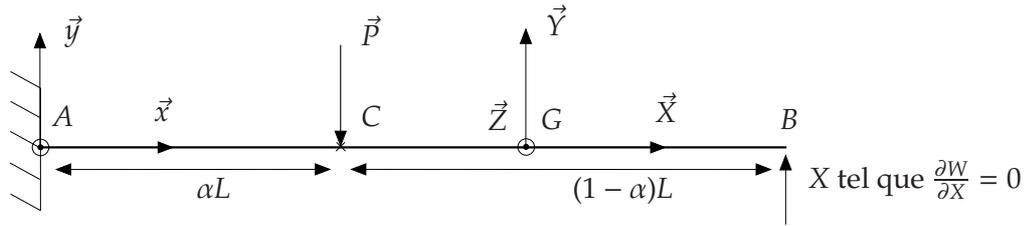


FIG. IV.3: Système isostatique équivalent associé à la poutre encastree-appuyée.

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{L^3 (P\alpha^3 - 3P\alpha^2 + 2X)}{6EI} = 0 \quad (\text{IV.39})$$

qui permet d'obtenir la valeur de X :

$$X = \frac{1}{2} (3P\alpha^2 - P\alpha^3) \quad (\text{IV.40})$$

10. pour calculer le déplacement vertical du point C , on remarque que ce déplacement est le dual de la force $-P$. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Castigliano :

$$v_C = \frac{\partial W}{\partial(-P)} = -\frac{\partial W}{\partial P} \quad (\text{IV.41})$$

en injectant l'expression de X dans W :

$$W = -\frac{L^3 P^2 (\alpha - 4)(\alpha - 1)^2 \alpha^3}{24EI} \quad (\text{IV.42})$$

soit :

$$v_C = \frac{L^3 P (\alpha - 4)(\alpha - 1)^2 \alpha^3}{12EI} \quad (\text{IV.43})$$

On remarque que si $\alpha = 0$ (A et C coïncident) ou $\alpha = 1$ (B et C coïncident), le déplacement est nul, ce qui est cohérent car les liaisons encastrement et appui simple considérées ici bloquent le déplacement en \vec{y} . D'autre part, comme α est compris entre 0 et 1, on a bien $v_C < 0$. La flèche maximale v_C (pour P donné) est obtenue pour $\alpha = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$.

11. on peut recalculer ce déplacement par une autre méthode. Comme nous avons un encastrement en A , la rotation et la translation d'une section plane Σ centrée en A sont nulles :

$$\vec{\omega}_A = \vec{0} \quad \vec{\Lambda}_A = \vec{0}. \quad (\text{IV.44})$$

D'après les formules de Bresse (équations III.62 et III.63), dans lesquelles on néglige toujours la contribution due à l'effort tranchant, il vient pour le point C :

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_A + \int_A^C \frac{M_Z}{EI} \vec{Z} ds \quad (\text{IV.45})$$

$$\vec{\Lambda}_C = \vec{\Lambda}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AC} + \int_{G \in [AC]} \left[\frac{M_Z}{EI} \vec{Z} \wedge \vec{GC} \right] ds \quad (\text{IV.46})$$

soit, si on s'intéresse uniquement au déplacement :

$$\begin{aligned}\vec{\Lambda}_C &= \int_0^{\alpha L} \left[\left(\frac{P(x - \alpha L) + X(L - x)}{EI} \right) \vec{Z} \wedge (\alpha L - x) \vec{X} \right] dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{\alpha L} \left[(P(x - \alpha L) + X(L - x))(\alpha L - x) \vec{Y} \right] dx = \left(-\frac{L^3 \alpha^2 (X(\alpha - 3) + 2P\alpha)}{6EI} \right) \vec{Y} \quad (\text{IV.47})\end{aligned}$$

En injectant l'expression de X (équation IV.40), il vient après factorisation :

$$\vec{\Lambda}_C = \left(\frac{L^3 P(\alpha - 4)(\alpha - 1)^2 \alpha^3}{12EI} \right) \vec{Y} \quad \Rightarrow \quad v_C = \vec{\Lambda}_C \cdot \vec{Y} = \frac{L^3 P(\alpha - 4)(\alpha - 1)^2 \alpha^3}{12EI} \quad (\text{IV.48})$$

et on retrouve bien la même expression que dans l'équation IV.43.

Deuxième partie

Chapitres non abordés en amphithéâtre

Etude des treillis plans

Sommaire

| | | |
|-------|---|----|
| V.1 | Présentation générale | 52 |
| V.2 | Equilibre des noeuds | 53 |
| V.3 | Loi de comportement des barres | 54 |
| V.4 | Bilan et méthodologie | 55 |
| V.5 | Méthodologie sur un exemple | 56 |
| V.5.1 | Énoncé du problème | 56 |
| V.5.2 | Equations de liaisons | 56 |
| V.5.3 | Équilibre des noeuds | 57 |
| V.5.4 | Loi de comportement des barres | 57 |
| V.5.5 | Bilan et résolution numérique | 58 |
| V.5.6 | Quelques remarques sur les résultats précédents | 60 |

V.1 Présentation générale

Lorsque la structure est composée de plusieurs barres (ou poutres) liées entre elles, on peut se donner quelques hypothèses de travail qui viennent compléter les hypothèses abordées jusqu'à présent. Ces nouvelles hypothèses permettent de simplifier (en terme de lourdeur de calculs) la résolution du problème de RDM qui à la base est complexifié par le (grand) nombre de barres. Entrons donc dans le vif du sujet en énonçant la

DÉFINITION V.1.1 : *Un treillis plan est un assemblage de poutres planes reliées entre elles en leurs extrémités qui constituent les noeuds du treillis.* ■

Dans ce cours, on ne considère que des treillis plans donc on omettra dans la suite l'adjectif "plan". Il convient de compléter la définition précédente par un certain nombre d'hypothèses, qui restreignent notre champ d'application mais, comme dit ci-dessus, permettent de simplifier la résolution :

- ❶ les liaisons avec l'extérieur sont réalisées au moyen d'articulations (=rotules planes), au niveau des noeuds.
- ❷ les forces extérieures sont appliquées aux noeuds
- ❸ le poids propre des barres est négligeable devant les forces extérieures.

Ces hypothèses suffisent à la résolution du problème de RDM qui consiste à déterminer les réactions de liaisons, les efforts intérieurs dans les barres, et les déplacements des noeuds. Pour identifier le type d'efforts intérieurs auxquels sont soumises les poutres, écrivons l'équilibre d'une barre AB d'un treillis. Soient \vec{F}_A et \vec{F}_B les résultantes des forces extérieures appliquées en A et en B . Les torseurs de ces forces sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{pour le point } A, \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad \text{pour le point } B, \quad (\text{V.1})$$

car aucun moment n'est appliqué aux noeuds (les rotules planes laissent les rotations des barres libres au niveau des noeuds). L'équilibre de la poutre au point A s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{AB} \wedge \vec{F}_B \end{array} \right\}_A = \{0\} \quad (\text{V.2})$$

soit :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0} \quad (\text{V.3})$$

Par conséquent, \vec{F}_A et \vec{F}_B sont opposées et sont colinéaires à la direction de la poutre AB . On retiendra donc que, compte tenu de nos hypothèses, **toutes les barres du treillis sont sollicitées en traction/compression, et que par conséquent le seul effort intérieur non nul est l'effort normal N , qui est constant dans une barre donnée.** Nous pouvons à présent détailler les équations qui régissent l'équilibre d'un treillis.

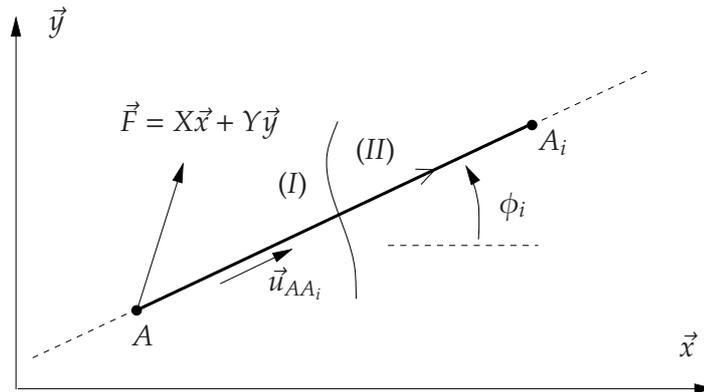


FIG. V.1: Equilibre d'un noeud A dans un treillis.

V.2 Equilibre des noeuds

Considérons un noeud du treillis noté A . Ce noeud peut être relié à un ou plusieurs autres noeuds A_i via des barres AA_i . Notons $\vec{F} = X\vec{x} + Y\vec{y}$ la résultante des forces extérieures et de liaisons appliquées en A . Notons encore ϕ_i l'angle polaire de \vec{AA}_i et N_i l'effort normal dans la barre AA_i , et \vec{u}_{AA_i} le vecteur unitaire de la barre AA_i , orienté de A vers A_i (voir figure V.1). L'orientation de la poutre définit en un point G quelconque une coupure, donc une partie amont notée (I) et une partie aval notée (II). L'équilibre du noeud A se réduit ici à l'équilibre des forces puisque A ayant une dimension nulle (c'est un point), tous les moments en A des forces s'exerçant au point A sont de la forme $\vec{AA} \wedge \bullet$, donc nuls. Notons maintenant que A appartient à la partie amont de la poutre (la partie (I)) donc :

$$\vec{F}_{\text{barre } i \rightarrow A} = \vec{F}_{(II) \rightarrow (I)} = N_i \vec{u}_{AA_i} \quad (\text{V.4})$$

par définition du torseur des efforts intérieurs et de l'effort normal (le vecteur \vec{u}_{AA_i} correspond ici au vecteur \vec{X} du repère local principal). On a ainsi, pour l'équilibre des forces :

$$\vec{F} + \sum_i N_i \vec{u}_{AA_i} = \vec{0} \quad (\text{V.5})$$

la sommation étant étendue à toutes les barres dont une des extrémités est le noeud A . On peut projeter cette équation dans le repère global de la structure, et énoncer le

RÉSULTAT V.2.1 : *L'équilibre d'un noeud A (voir figure V.1) se réduit aux 2 jeux d'équations :*

$$X + \sum_i N_i \cos \phi_i = 0 \quad (\text{V.6})$$

$$Y + \sum_i N_i \sin \phi_i = 0 \quad (\text{V.7})$$

la sommation étant étendue à toutes les barres i dont une des extrémités est le noeud A . ■

Nous avons exploité ici l'information issue du principe fondamental de la statique. Il convient à présent de "particulariser" le lien entre efforts et déplacements au cas des treillis.

V.3 Loi de comportement des barres

Pour calculer le déplacement des noeuds, nous allons écrire la loi de comportement des barres. Pour ce faire, on fait appel à un résultat du chapitre III (voir la section III.2.2). Nous avons montré que, pour l'effort normal, toute section droite située à l'abscisse s subit une translation

$$d\vec{\Lambda} = \frac{N}{ES} ds \vec{X} \quad (\text{V.8})$$

Si on se réfère à une des extrémités de la barre, le cumul des déplacements de toutes les sections droites Σ coïncide avec le déplacement de l'autre extrémité de la barre. Ce déplacement est égal à l'allongement total ΔL . On peut donc écrire :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{ES} ds = \frac{NL}{ES} \quad \text{car } N \text{ est constant} \quad (\text{V.9})$$

D'autre part, si on note (x_i, y_i) et (x_j, y_j) les coordonnées des points A_i et A_j , extrémités de la poutre $A_i A_j$, la longueur de la poutre L est donnée par :

$$L^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (\text{V.10})$$

Pour prendre en compte les déformations subies par le treillis, envisageons une petite variation de cette équation¹ :

$$2L\Delta L = 2(x_j - x_i)\Delta(x_j - x_i) + 2(y_j - y_i)\Delta(y_j - y_i) \quad (\text{V.11})$$

ou encore, comme l'opérateur de variation Δ est un opérateur linéaire :

$$\Delta L = \underbrace{\frac{x_j - x_i}{L}}_{\cos \phi_{ij}} (\Delta x_j - \Delta x_i) + \underbrace{\frac{y_j - y_i}{L}}_{\sin \phi_{ij}} (\Delta y_j - \Delta y_i) \quad (\text{V.12})$$

Les variations $\Delta x_i, \Delta x_j, \Delta y_i, \Delta y_j$ sont par définition les déplacements horizontaux et verticaux des points A_i et A_j . Nous pouvons les noter respectivement u_i, u_j, v_i et v_j . On reconnaît également dans l'équation V.12 les cosinus et les sinus de l'angle ϕ_{ij} . En identifiant les équations V.9 et V.12, on peut donc énoncer le

RÉSULTAT V.3.1 : *La loi de comportement d'une barre $A_i A_j$ se réduit à l'équation :*

$$\left(\frac{NL}{ES}\right)_{ij} = (u_j - u_i) \cos \phi_{ij} + (v_j - v_i) \sin \phi_{ij} \quad (\text{V.13})$$

Cette relation est le lien entre l'effort normal N et le déplacement des extrémités. Pour terminer cette section, indiquons que l'énergie totale W stockée dans la poutre est la somme des énergies de compression stockées dans chacune des poutres. On peut donc énoncer le

¹on devrait en toute rigueur noter d à la place de Δ . Toutefois, ceci conduirait à des égalités entre termes infinitésimaux et termes finis dans l'équation V.9. Comme nous avons clairement affirmé que l'hypothèse des petites perturbations était valide, l'opérateur Δ fonctionne comme un opérateur de différentiation

RÉSULTAT V.3.2 : *L'énergie totale W stockée dans le treillis est*

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{N^2 L}{ES} \right)_i \quad (\text{V.14})$$

la sommation étant faite pour toutes les barres i . ■

L'ensemble des équations permettant la résolution d'un treillis étant présenté, nous pouvons conclure avec un bilan des équations et la méthodologie à adopter.

V.4 Bilan et méthodologie

Faisons un bilan des inconnues du problème de RDM associé à un treillis. Soit b le nombre de barre(s) qui constitue(nt) ce dernier, n le nombre de noeuds, et q le degré d'hyperstaticité (éventuellement nul). Nous avons :

- $2n$ équations d'équilibre pour les noeuds,
 - b équations de comportement pour les barres,
 - $3 + q$ conditions imposées sur les déplacements nodaux par les liaisons extérieures.
- soit un total de $2n + b + 3 + q$ équations. Détaillons un peu le dernier terme ($3 + q$). Il y a au moins 3 conditions indépendantes sur les déplacements nodaux car il faut positionner le treillis dans le plan \vec{x}, \vec{y} et l'empêcher d'avoir un mouvement d'ensemble. Il faut donc bloquer les deux translations d'ensemble suivant \vec{x} et \vec{y} et la rotation d'ensemble autour de \vec{z} . On peut montrer que d'une manière ou d'une autre, ces trois degrés de libertés bloqués se traduiront toujours par 3 équations sur les déplacements nodaux. Si désormais on rajoute q réactions hyperstatiques, chacune de ces réactions bloque un déplacement, ce qui induit q équations scalaires indépendantes supplémentaires, de la forme $u = 0$ ou $v = 0$.

En ce qui concerne les inconnues, nous avons à déterminer :

- $2n$ déplacements nodaux,
- b efforts normaux dans les barres
- $3 + q$ réactions de liaison extérieures.

Au total, il y a donc $2n + b + 3 + q$ équations pour trouver $2n + b + 3 + q$ inconnues, donc **la résolution du système (linéaire) peut se faire dans tous les cas**. La méthodologie de résolution sera la suivante :

1. numérotter les noeuds et les barres du treillis
2. identifier les conditions imposées sur les déplacements nodaux par les liaisons extérieures
3. écrire l'équilibre des noeuds (équations V.6 et V.7)
4. écrire la loi de comportement pour toutes les barres (équation V.13).
5. résoudre le système d'équations pour déterminer les déplacements nodaux (u_i, v_i) , les inconnues de liaisons R_i et les efforts normaux dans les barres N_i .

V.5 Méthodologie sur un exemple

V.5.1 Énoncé du problème

On considère le treillis plan de la figure V.2.

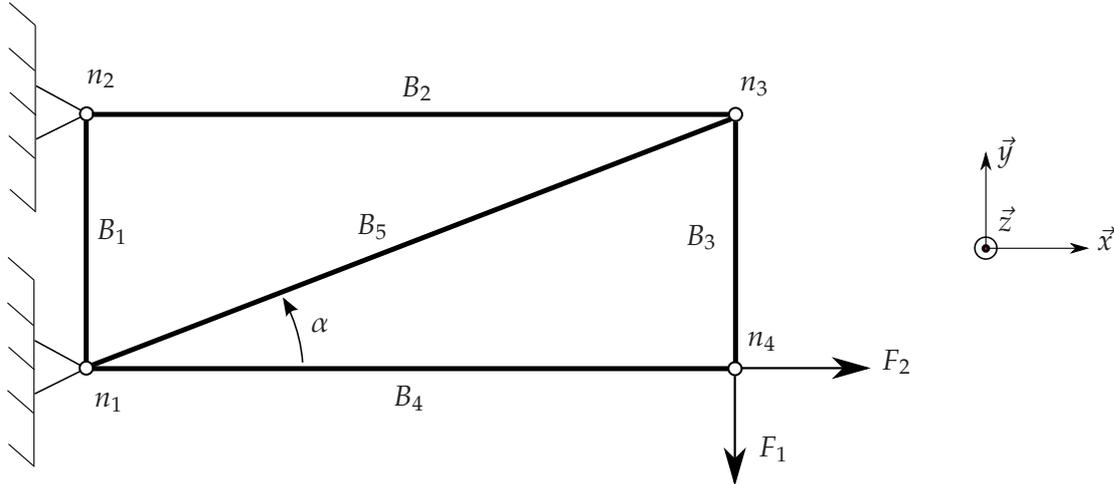


FIG. V.2: Treillis plan constitué de 5 barres $B_i, i = 1..5$.

Le noeud n_4 est soumis à deux forces extérieures F_1 et F_2 respectivement verticale et horizontale. On donne $L_1 = L_3 = L$ et $L_2 = L_4 = 2L$, ce qui implique que $L_5 = \sqrt{5}L$ et $\alpha = \arctan(1/2)$. Commençons par dresser le bilan des inconnues :

– **les déplacements nodaux.** Nous avons 4 noeuds donc 8 déplacements nodaux :

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4 \quad (V.15)$$

– **les efforts normaux dans les barres :**

$$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 \quad (V.16)$$

– **les inconnues de liaisons.** Nous avons ici 2 liaisons articulations qui bloquent les translations des noeuds n_1 et n_2 . Nous noterons donc les inconnues

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2 \quad (V.17)$$

Au total, il y a 17 inconnues à déterminer.

V.5.2 Equations de liaisons

Les liaisons articulations en n_1 et n_2 permettent d'écrire directement :

$$u_1 = 0, v_1 = 0, u_2 = 0, v_2 = 0 \quad (V.18)$$

ce qui totalise déjà 4 équations.

V.5.3 Équilibre des noeuds

On peut désormais écrire l'équilibre des noeuds ; prenons comme exemple l'équilibre du noeud n_1 . Il convient tout d'abord d'identifier les vecteurs directeurs (unitaires) des poutres dont une extrémité est n_1 . On a ainsi :

$$\underbrace{\vec{u}_{n_1 n_2}}_{\text{barre 1}} = \vec{y}, \quad \underbrace{\vec{u}_{n_1 n_4}}_{\text{barre 4}} = \vec{x}, \quad \underbrace{\vec{u}_{n_1 n_3}}_{\text{barre 5}} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y} \quad (\text{V.19})$$

En appliquant l'équation (V.5) avec $A \equiv n_1$, et compte tenu du fait que les forces extérieures coïncident ici avec les réactions de liaison X_1 et Y_1 , on obtient :

$$\underbrace{X_1 \vec{x} + Y_1 \vec{y}}_{\vec{F}} + \underbrace{N_1 \vec{u}_{n_1 n_2} + N_5 \vec{u}_{n_1 n_3} + N_4 \vec{u}_{n_1 n_4}}_{\sum_i N_i \vec{u}_{AA_i}} = \vec{0} \quad (\text{V.20})$$

soit, après projection sur les axes \vec{x} et \vec{y} :

$$X_1 + N_4 + N_5 \cos \alpha = 0 \quad (\text{V.21})$$

$$Y_1 + N_1 + N_5 \sin \alpha = 0 \quad (\text{V.22})$$

On procède de même pour tous les noeuds, ce qui permet d'écrire :

– pour le noeud n_2 :

$$X_2 + N_2 = 0 \quad (\text{V.23})$$

$$Y_2 - N_1 = 0 \quad (\text{V.24})$$

– pour le noeud n_3 :

$$N_2 + N_5 \cos \alpha = 0 \quad (\text{V.25})$$

$$N_3 + N_5 \sin \alpha = 0 \quad (\text{V.26})$$

– pour le noeud n_4 :

$$F_2 - N_4 = 0 \quad (\text{V.27})$$

$$-F_1 + N_3 = 0 \quad (\text{V.28})$$

Nous remarquons que nous avons identifié 8 équations supplémentaires, ce qui porte à 12 le nombre total d'équations écrites jusqu'à présent.

V.5.4 Loi de comportement des barres

Il nous reste à écrire la loi de comportement des barres. De manière analogue à précédemment, prenons la barre B_1 comme exemple. Si on oriente la poutre de n_1 à n_2 , alors nous avons $\phi_{12} = \pi/2$. L'équation (V.13) avec $i \equiv n_1$ et $j \equiv n_2$ permet alors d'écrire :

$$\frac{N_1 L}{ES} = (u_2 - u_1) \cos(\pi/2) + (v_2 - v_1) \sin(\pi/2) = v_2 - v_1 \quad (\text{V.29})$$

Notons que l'orientation de la barre est totalement arbitraire. En effet, si on oriente de n_2 à n_1 , alors nous avons désormais $\phi_{21} = 3\pi/2$, mais le rôle de i et j (c.à.d. le rôle de début/fin) est inversé. Ainsi, l'équation (V.13) avec $j \equiv n_1$ et $i \equiv n_2$ devient désormais :

$$\frac{N_1 L}{ES} = (u_1 - u_2) \cos(3\pi/2) + (v_1 - v_2) \sin(3\pi/2) = v_2 - v_1 \quad (\text{V.30})$$

ce qui est bien identique à l'équation (V.29). On peut ainsi procéder de la même manière pour les autres barres, et on obtient :

– pour la barre B_2 :

$$\frac{2N_2 L}{ES} = u_3 - u_2 \quad (\text{V.31})$$

– pour la barre B_3 :

$$\frac{N_3 L}{ES} = v_3 - v_4 \quad (\text{V.32})$$

– pour la barre B_4 :

$$\frac{2N_4 L}{ES} = u_4 - u_1 \quad (\text{V.33})$$

– pour la barre B_5 :

$$\frac{\sqrt{5}N_5 L}{ES} = (u_3 - u_1) \cos \alpha + (v_3 - v_1) \sin \alpha \quad (\text{V.34})$$

L'équilibre des 5 barres fournit donc 5 équations supplémentaires.

V.5.5 Bilan et résolution numérique

Finalement, nous obtenons 17 équations qui permettent de trouver les 17 inconnues de notre problème. Le programme Mathematica[©] suivant permet de résoudre le système linéaire et de tracer la déformée du treillis (en rouge).

(* Valeurs numériques *)

```

α = ArcTan[0.5];
L = 2;
Diam = 0.04;
S = Pi * Diam^2/4;
EYoung = 210 * 10^9;
ES = EYoung * S;
F1 = 10000;
F2 = 15000;

```

(* Définition des équations *)

```

eq1 := X1 + N4 + N5 * Cos[α] == 0
eq2 := Y1 + N5 * Sin[α] + N1 == 0
eq3 := X2 + N2 == 0
eq4 := Y2 - N1 == 0
eq5 := N2 + N5 * Cos[α] == 0
eq6 := N3 + N5 * Sin[α] == 0

```

```

eq7 := - N4 + F2 == 0
eq8 := - F1 + N3 == 0
eq9 := N1 * L/ES == v2 - v1
eq10 := 2 * N2 * L/ES == u3 - u2
eq11 := N3 * L/ES == v4 - v3
eq12 := 2 * N4 * L/ES == u4 - u1
eq13 := Sqrt[5] * N5 * L/ES == (u3 - u1) * Cos[α] + (v3 - v1) * Sin[α]
eq14 := u1 == 0
eq15 := v1 == 0
eq16 := u2 == 0
eq17 := v2 == 0

```

(*Résolution*)

```

systeme := {eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8, eq9, eq10, eq11, eq12, eq13, eq14, eq15, eq16, eq17}
inconnues := {X1, Y1, X2, Y2, N1, N2, N3, N4, N5, u1, v1, u2, v2, u3, v3, u4, v4}

```

```

solution := NSolve[systeme, inconnues]
solution

```

```

{{X1 → 5000., Y1 → 10000., X2 → -20000., Y2 → 0., N1 → 0., N2 → 20000., N3 → 10000., N4 →
15000., N5 → -22360.7, u1 → 0., v1 → 0., u2 → 0., v2 → 0., u3 → 0.000303152, v3 →
-0.00145364, u4 → 0.000227364, v4 → -0.00137785}}

```

(* Définition des noeuds Ai en configuration initiale avec le noeud 1 comme origine *)

```

A1 := {0, 0}
A2 := {0, L}
A3 := {2 * L, L}
A4 := {2 * L, 0}

```

(* Définition des noeuds Bi en configuration déformée (amplifiée) *)

```

ampli = 100;

```

```

B1 := A1 + ampli * {u1, v1} // .solution[[1]]
B2 := A2 + ampli * {u2, v2} // .solution[[1]]
B3 := A3 + ampli * {u3, v3} // .solution[[1]]
B4 := A4 + ampli * {u4, v4} // .solution[[1]]

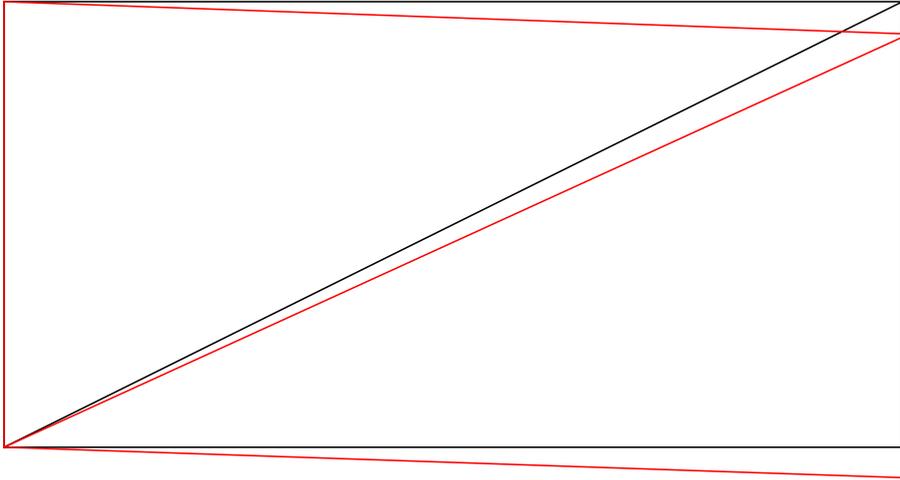
```

```

Graphics[{
Line[{A1, A2}],
Line[{A2, A3}],
Line[{A3, A4}],
Line[{A4, A1}],
Line[{A1, A3}],
{Red, Line[{B1, B2}]},
{Red, Line[{B2, B3}]},

```

```
{Red, Line[{B3, B4}]},  
{Red, Line[{B4, B1}]},  
{Red, Line[{B1, B3}]}  
}}
```



V.5.6 Quelques remarques sur les résultats précédents

Les résultats numériques précédents peuvent être commentés :

- on observe que N_2, N_3, N_4 sont positifs, ce qui indique que les barres B_2, B_3 et B_4 travaillent en traction. Ce résultat semble raisonnable compte tenu du chargement extérieur.
- le fait que N_5 soit négatif montre que la barre B_5 travaille en compression (cette barre assure le maintien du treillis, puisque sans elle, le treillis pourrait s'aplatir).
- le fait que N_1 soit nul montre que la barre B_1 ne sert en fait à rien !

Chapitre VI

Les critères de ruptures

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| VI.1 Définition générale | 62 |
| VI.1.1 Rappels sur les invariants | 62 |
| VI.1.2 Définition générale d'un critère | 63 |
| VI.2 Quelques critères | 64 |
| VI.2.1 Le critère de Von Mises | 64 |
| VI.2.2 Le critère de Drücker-Prager | 65 |
| VI.2.3 Le critère de Mohr-Coulomb | 66 |
| VI.2.4 Le critère de Tresca | 66 |
| VI.2.5 Finalement... | 67 |
| VI.3 Application : rupture d'une poutre sollicitée en torsion | 67 |

Nous avons étudié jusqu'à présent l'équilibre des forces qui s'appliquent sur une structure et la déformée induite par ces dernières. Nous allons à présent nous intéresser à la sollicitation maximale qu'une structure peut supporter avant que la rupture ne s'amorce. Plus précisément, nous allons présenter quelques **critères de rupture**, qui posent des conditions sur le tenseur des contraintes $\sigma(M)$ pour que la rupture s'amorce au point M .

VI.1 Définition générale

Avant de donner la définition générale d'un critère de rupture, nous allons présenter très brièvement quelques rappels mathématiques utiles.

VI.1.1 Rappels sur les invariants

Certains critères de rupture sont formulés avec la notion de **contrainte équivalente**. Cette dernière nécessite de rappeler d'abord la

DÉFINITION VI.1.1 : *Le déviateur du tenseur des contraintes σ , noté s , est défini par*

$$s = \sigma - \frac{1}{3}I_1I \quad (\text{VI.1})$$

où I_1 est la trace de σ , et I le tenseur unité. ■

On note que la trace du déviateur des contraintes est nulle :

$$\text{Tr}(s) = \text{Tr}(\sigma) - \frac{1}{3}I_1\text{Tr}(I) = I_1 - \frac{1}{3}I_1 \times 3 = 0 \quad (\text{VI.2})$$

et qu'il est possible de réécrire σ sous la forme :

$$\sigma = \frac{1}{3}I_1I + s \quad (\text{VI.3})$$

Cette dernière expression montre qu'en un point M , σ se décompose de manière unique en une partie **hydrostatique** $\frac{1}{3}I_1I$ et une partie **déviatorique** s . La première traduit l'état de compression pure que subirait un élément dV situé autour du point M , tandis que la seconde contient l'information sur le cisaillement subi par ce même volume (voir la représentation schématique de la figure VI.1). Chacune de ces informations peut se "condenser" sous forme d'un scalaire. Pour la partie hydrostatique, c'est la trace de σ ou la **contrainte moyenne** $p = I_1/3$. Pour la partie déviatorique, il s'agit de la **contrainte équivalente** qu'on introduit grâce à la :

DÉFINITION VI.1.2 : *La contrainte équivalente σ_{eq} , appelée également contrainte équivalente au sens de Von-Mises, est définie par :*

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}s : s} \quad (\text{VI.4})$$

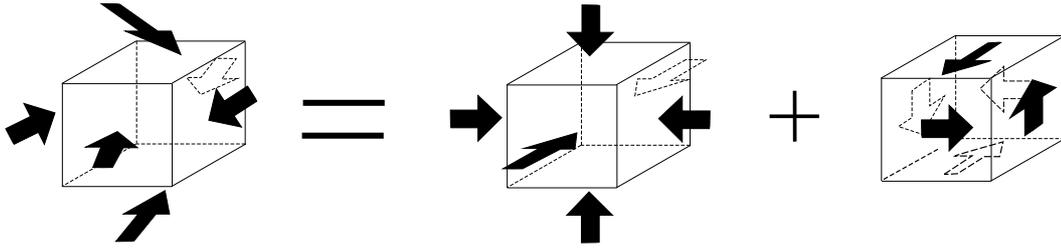


FIG. VI.1: Représentation schématique de la décomposition de σ en une partie hydrostatique (qui comprime dV) et une partie déviatorique (qui cisaille dV).

On rappelle que le symbole “:” est le produit doublement contracté défini par :

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ji} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \quad (\text{VI.5})$$

pour tous tenseurs \mathbf{a} et \mathbf{b} d'ordre 2. Pour un tenseur \mathbf{c} d'ordre 2 symétrique ($c_{ij} = c_{ji}$), on a donc :

$$\mathbf{c} : \mathbf{c} = \sum_{i,j} c_{ij}c_{ji} = \sum_{i,j} c_{ij}^2 = c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 + 2c_{12}^2 + 2c_{13}^2 + 2c_{23}^2 \quad (\text{VI.6})$$

D'un point de vue physique, la contrainte équivalente σ_{eq} calculée en un point M est une **mesure scalaire du cisaillement** que subit un élément de volume dV autour de M .

VI.1.2 Définition générale d'un critère

Rentrons dans le vif du sujet en énonçant la

DÉFINITION VI.1.3 : *Un critère de rupture est une fonction f du tenseur des contraintes σ qui vérifie :*

- $f[\sigma(M)] < 0$ tant qu'il n'y a pas de rupture au point M
- $f[\sigma(M)] \geq 0$ dès qu'il y a initiation de la rupture au point M ■

Il est très important de noter que le critère de rupture indique quand la rupture s'initie, **mais ne donne aucune information sur comment la rupture se propage**. C'est la **Mécanique de la rupture** qui répond à cette question. On peut formuler la fonction f à partir de considérations microscopiques, ou simplement par empirisme. Nous allons présenter ici quelques critères de rupture “classiques”, qui ont été historiquement formulés par empirisme.

VI.2 Quelques critères

VI.2.1 Le critère de Von Mises

Il énonce simplement que la contrainte équivalente de Von Mises doit dépasser une certaine valeur σ_Y , qui est un paramètre du matériau :

$$f_{VM}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_Y \quad (\text{VI.7})$$

Envisageons un exemple pour illustrer ce critère :

EXEMPLE VI.2.1 : Une éprouvette cylindrique est assujettie au champ de contrainte uniforme suivant (ce champ est écrit dans la base canonique $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & \beta t \end{pmatrix} \quad (\text{VI.8})$$

A quel instant t la rupture va-t-elle s'amorcer ?

Calculons d'abord le déviateur des contraintes :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & \beta t \end{pmatrix} - \frac{1}{3}t(2\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (\alpha - \beta)t & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \beta)t & 0 \\ 0 & 0 & 2(\beta - \alpha)t \end{pmatrix} \quad (\text{VI.9})$$

On déduit la contrainte équivalente :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (\alpha - \beta)t & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \beta)t & 0 \\ 0 & 0 & 2(\beta - \alpha)t \end{pmatrix} : \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (\alpha - \beta)t & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \beta)t & 0 \\ 0 & 0 & 2(\beta - \alpha)t \end{pmatrix}} \quad (\text{VI.10})$$

soit encore :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{6} [2(\alpha - \beta)^2 t^2 + 4(\beta - \alpha)^2 t^2]} = |\alpha - \beta|t \quad (\text{VI.11})$$

si on suppose $t > 0$. Ainsi, la condition de non rupture s'écrit :

$$|\alpha - \beta|t \leq \sigma_Y \quad (\text{VI.12})$$

et il y aura rupture pour :

$$t = \frac{\sigma_Y}{|\alpha - \beta|} \quad (\text{VI.13})$$

Si $\alpha = \beta$ alors le chargement est purement hydrostatique et on a $\sigma_{eq} = 0$, donc la condition de non-rupture est toujours vérifiée ! Bien entendu, ceci est une limite du modèle. ■

En pratique, on peut mesurer le paramètre σ_Y à l'aide d'un essai de compression simple sur une éprouvette cylindrique. On a alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} \Rightarrow \sigma_{eq} = |\sigma| \quad (\text{VI.14})$$

Par suite, le protocole de mesure est le suivant : (i) on augmente progressivement σ (plus précisément $|\sigma|$) en partant de 0 et (ii) σ_Y correspond à la valeur de $|\sigma|$ au moment où l'éprouvette commence à se fissurer (la condition de rupture est en effet $\sigma_{eq} = |\sigma| = \sigma_Y$). La figure VI.2 illustre ce type de test.

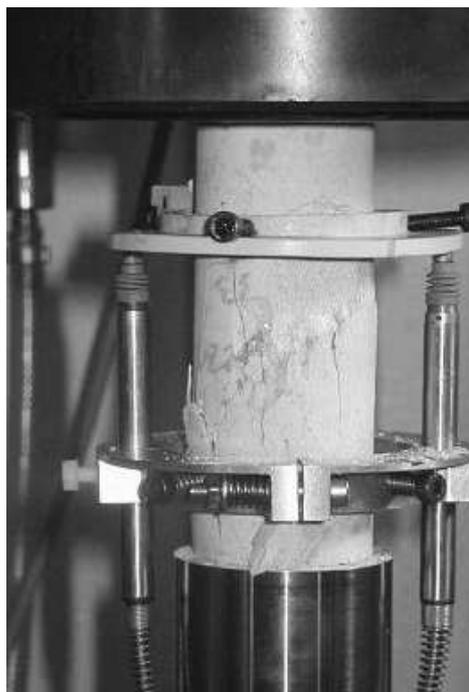


FIG. VI.2: Test de compression uniaxiale permettant (entre autre) de déterminer le paramètre σ_Y (référence : http://www.lcpc.fr/fr/presentation/organigramme/div_msrgi/themes/environ/approche/img/eprouvette.jpg).

VI.2.2 Le critère de Drücker-Prager

On voit dans l'exemple (VI.2.1) que la rupture (au sens du critère de Von-Mises) ne peut pas être observée pour un chargement hydrostatique. Ceci est dû au fait que la fonction f_{VM} ne dépend pas de la trace de σ . Pour répondre à cette insuffisance, le critère de rupture de Drücker-Prager introduit justement une dépendance en I_1 :

$$f_{DP}(\sigma) = \sigma_{eq} + AI_1 - \sigma_Y \quad (\text{VI.15})$$

Le coefficient A est appelé **coefficient de frottement interne** du matériau. Il peut être déterminé en même temps que σ_Y par une série d'essais de compression triaxiale. Comme précédemment, envisageons un exemple d'application :

EXEMPLE VI.2.2 : Reprenons le problème de l'exemple (VI.2.1). On a toujours :

$$\sigma_{eq} = |\alpha - \beta|t \quad (\text{VI.16})$$

et la trace du tenseur σ vaut :

$$I_1 = (2\alpha + \beta)t \quad (\text{VI.17})$$

La condition de non rupture s'écrit donc désormais :

$$|\alpha - \beta|t + A(2\alpha + \beta)t \leq \sigma_Y \quad (\text{VI.18})$$

et il y aura rupture pour :

$$t = \frac{\sigma_Y}{\beta - \alpha + A(2\alpha + \beta)} \quad \text{si } \alpha < \beta, \quad \text{et } t = \frac{\sigma_Y}{\alpha - \beta + A(2\alpha + \beta)} \quad \text{si } \alpha > \beta \quad (\text{VI.19})$$

Si $\alpha = \beta$ (chargement purement hydrostatique) alors la condition de non-rupture s'écrit simplement :

$$A(2\alpha + \beta)t \leq \sigma_Y \quad (\text{VI.20})$$

VI.2.3 Le critère de Mohr-Coulomb

Contrairement aux précédents critères, ce critère s'exprime en fonction des **contraintes principales** σ_I, σ_{II} et σ_{III} , qui sont les valeurs propres ordonnées ($\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) du tenseur des contraintes σ . La fonction de seuil est ici définie par :

$$f_{MC}(\sigma) = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \sin \phi - C \cos \phi \quad (\text{VI.21})$$

où C et ϕ sont deux paramètres propres au matériau qu'on appelle **cohésion** et **angle de frottement**.

EXEMPLE VI.2.3 : Si on reprend l'exemple (VI.2.1), alors on remarque que le tenseur des contraintes est déjà diagonal. Si on suppose que l'origine des temps est telle que $t > 0$ et si on suppose également que $\alpha > \beta$, on a donc :

$$\sigma_I = \alpha t, \quad \sigma_{II} = \alpha t, \quad \sigma_{III} = \beta t, \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad \forall t \quad (\text{VI.22})$$

Par suite, la condition de non rupture s'écrit :

$$\frac{(\alpha - \beta)t}{2} - \frac{(\alpha + \beta)t}{2} \sin \phi - C \cos \phi \leq 0 \quad (\text{VI.23})$$

et la rupture s'amorcera pour :

$$t = \frac{2C \cos \phi}{\alpha(1 - \sin \phi) - \beta(1 + \sin \phi)} \quad (\text{VI.24})$$

VI.2.4 Le critère de Tresca

Ce critère s'exprime également en fonction des contraintes principales, et s'écrit :

$$f_T(\sigma) = \max_{I, J \in \{1, 2, 3\}} \max_{x, y, z, t} |\sigma_I(x, y, z, t) - \sigma_J(x, y, z, t)| - K \quad (\text{VI.25})$$

où K est une constante qui dépend du matériau. Il faut bien comprendre que cette équation nécessite deux processus de maximisation : il faut en effet trouver (i) le point (x, y, z) et l'instant t tel que (ii) la différence entre deux contraintes principales en valeur absolue soit la plus grande possible.

EXEMPLE VI.2.4 : Soit le champ de contrainte stationnaire suivant écrit dans la base canonique cartésienne e_x, e_y, e_z :

$$\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} axy(x-c)(y-c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.26})$$

et régnant dans un carré de côté c , avec a une constante strictement positive. L'amplitude du champ de contrainte étant donnée (via la constante a), pour quelle valeur de c y a-t-il rupture, et en quel point ?

Le tenseur est déjà diagonal, donc on peut directement écrire :

$$\sigma_I = axy(x-c)(y-c), \quad \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{III} = 0 \quad (\text{VI.27})$$

Envisageons les 3 cas possibles pour le terme $|\sigma_I - \sigma_J|$:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_I - \sigma_{III} = axy(x-c)(y-c), \quad \sigma_{II} - \sigma_{III} = 0 \quad (\text{VI.28})$$

On déduit donc :

$$\max_{I, J \in \{1, 2, 3\}} \max_{x, y \in [0, c]^3} |\sigma_I(x, y) - \sigma_J(x, y)| = \max_{x, y \in [0, c]^3} |axy(x-c)(y-c)| \quad (\text{VI.29})$$

On peut montrer que le maximum de cette fonction est atteint au point $x = c/2, y = c/2$. Par suite, la condition de non rupture s'écrit :

$$\left| \frac{ac^4}{16} \right| \leq K \quad (\text{VI.30})$$

Ainsi, la rupture s'amorcera si la dimension du côté du carré dépasse la valeur critique $c_{crit} = (16K/a)^{1/4}$, et cette rupture s'amorcera au centre du carré. ■

VI.2.5 Finalement...

On pourra donc conclure qu'un critère de rupture permet (i) de calculer les forces maximales qu'on peut exercer sur une structure de géométrie donnée, ou de manière "duale", (ii) de calculer la géométrie d'une structure pour que cette dernière supporte un chargement donné. Il est absolument crucial de rappeler ici les limitations du cours : dans tout ce chapitre, nous avons supposé que la rupture à lieu dans le domaine élastique (on parle de comportement **élastique fragile**). Cette approximation peut paraître cavalière, dans la mesure où on observe pour la plupart des matériaux un comportement plastique avant la rupture.

VI.3 Application : rupture d'une poutre sollicitée en torsion

On considère une poutre AB de longueur L , de section circulaire (rayon R), encadrée en A ($z = 0$) et soumise à un moment de torsion $\vec{M} = M\vec{z}$ en B (voir figure VI.3). On se propose de calculer la valeur de M qui conduit à la rupture en admettant que le matériau vérifie un critère de type Tresca.

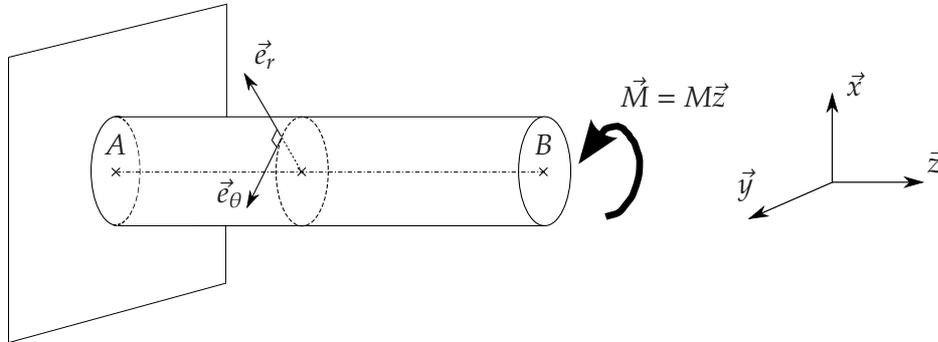


FIG. VI.3: Poutre encadrée en A et sollicitée par un moment de torsion en B .

Les torseurs de liaisons et de chargement sont donnés par :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} + Z_A\vec{z} \\ U_A\vec{x} + V_A\vec{y} + W_A\vec{z} \end{array} \right\}_A, \quad \{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ M\vec{z} \end{array} \right\}_B \quad (\text{VI.31})$$

si bien que l'équilibre au point A permet d'écrire :

$$X_A = 0, \quad Y_A = 0, \quad Z_A = 0, \quad U_A = 0, \quad V_A = 0, \quad W_A = -M \quad (\text{VI.32})$$

Si on oriente la poutre de A vers B , alors les efforts intérieurs sont donnés par :

$$N(z) = 0, \quad T_Y(z) = 0, \quad T_Z(z) = 0, \quad M_X(z) = M, \quad M_Y(z) = 0, \quad M_Z(z) = 0 \quad (\text{VI.33})$$

D'après le résultat III.4.1, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_x r}{I_x} \\ 0 & \frac{M_x r}{I_x} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M r}{I_x} \\ 0 & \frac{M r}{I_x} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z})} \quad (\text{VI.34})$$

Si on suppose que M est positif, et comme r et I_x sont positifs, on peut montrer que les contraintes principales sont données par :

$$\sigma_I = \frac{M r}{I_x}, \quad \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{III} = -\frac{M r}{I_x} \quad (\text{VI.35})$$

On peut donc calculer les 3 combinaisons possibles :

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| = |\sigma_{II} - \sigma_{III}| = \frac{M r}{I_x}, \quad |\sigma_I - \sigma_{III}| = \frac{2M r}{I_x} \quad (\text{VI.36})$$

La condition de non rupture s'écrit donc :

$$\max_{r, \theta, z} \left[\frac{2M r}{I_x} \right] \leq K \quad (\text{VI.37})$$

L'expression de gauche est linéairement croissante en $r \in [0; R]$ donc le maximum est atteint en $r = R$, et :

$$\frac{2M R}{I_x} \leq K \quad \Rightarrow \quad M \leq \frac{K I_x}{2R} \quad (\text{VI.38})$$

Par suite, la rupture s'amorcera en $r = R$ dès que M sera égal à la valeur critique

$$M_{crit} = \frac{K I_x}{2R} \quad (\text{VI.39})$$

On note que le critère ne donne qu'une indication peu précise sur la localisation de la rupture. En effet, on sait juste que cette dernière s'amorcera en $r = R$, mais on ne sait pas pour quelle valeur de z .

Troisième partie

Exercices abordés en séances de TD

Chapitre VII

Énoncés des TD

Sommaire

| | |
|--|----|
| Exercice 1 : Equilibre d'une grue | 72 |
| Exercice 2 : Equilibre d'une arche soumise au vent | 73 |
| Exercice 3 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé en I | 74 |
| Exercice 4 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé tubulaire | 75 |
| Exercice 5 : Etude d'un portique articulé-appuyé | 76 |
| Exercice 6 : Etude d'une poutre encastree | 77 |
| Exercice 7 : Profil d'un château d'eau | 78 |
| Exercice 8 : Etude de la déformée d'une poutre soumise à un moment | 79 |
| Exercice 9 : Etude d'un ressort à lame | 80 |
| Exercice 10 : Rupture d'une poutre en flexion | 81 |
| Exercice 11 : Etude d'une structure hyperstatique | 82 |
| Exercice 12 : Etude d'une liaison imparfaite | 83 |
| Exercice 13 : Etude de la stabilité d'un toit de galerie | 84 |
| Exercice 14 : Problème-type donné à la colle | 85 |

EXERCICE 1 : Equilibre d'une grue

On considère la structure de la figure VII.1.

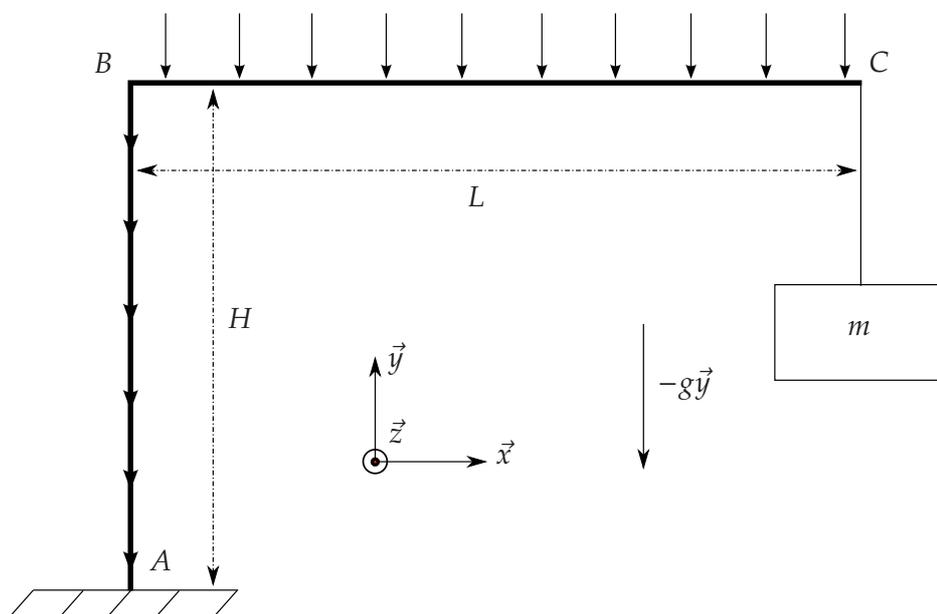


FIG. VII.1: Grue encastrée soumise à son poids propre et au poids d'une masse m .

La grue est encastrée en A , soumise à son poids propre, et au poids d'une masse m qui est accrochée au point C . On donne :

- λ le poids linéique de la poutre,
- $AB = H, BC = L$. A est l'origine du repère.

1. Tracer l'allure de la déformée.
2. Ecrire les équations d'équilibre en respectant la méthodologie vue en cours.
3. La structure est-elle isostatique ou hyperstatique ?

EXERCICE 2 : Equilibre d'une arche soumise au vent

On considère la structure de la figure VII.2.

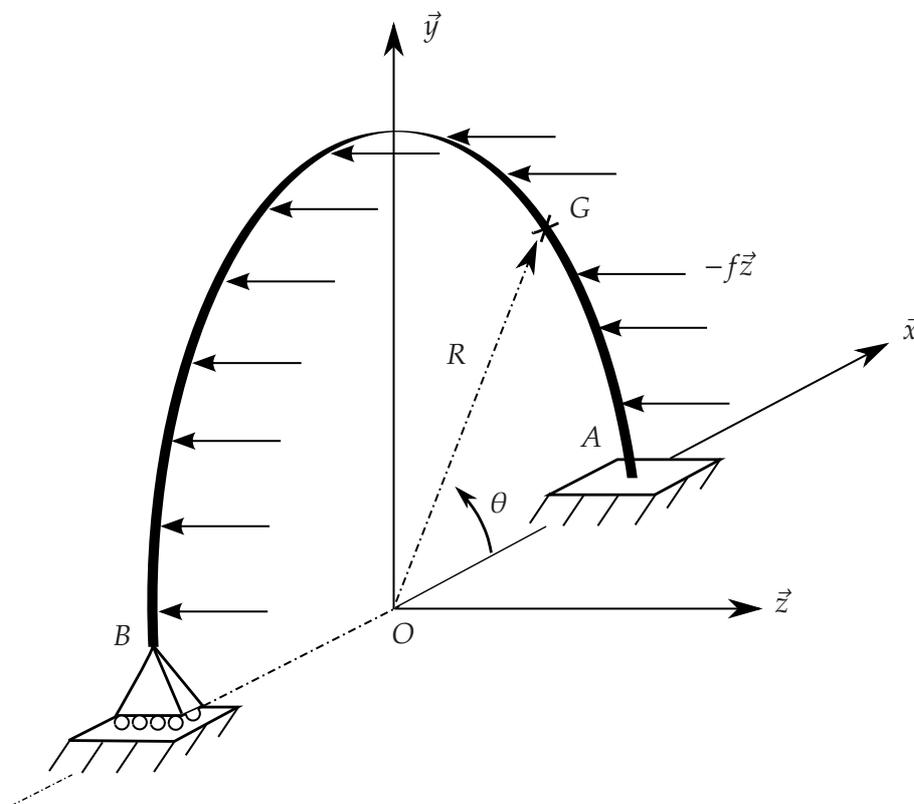


FIG. VII.2: Arche soumise à l'action du vent.

L'arche est de forme circulaire, encastree en A et appuyée sur rouleaux en B . Elle est soumise à l'action du vent, que l'on traduit par une densité linéique de force $\vec{f} = -f\vec{z}$ avec $f > 0$. On donne :

- R le rayon de l'arche,
- O l'origine du repère.

1. Tracer l'allure de la déformée.
2. Ecrire les équations d'équilibre en respectant la méthodologie vue en cours (on pourra omettre le détail des calculs une fois le bilan des torseurs écrit).
3. La structure est-elle isostatique ou hyperstatique ?

EXERCICE 3 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé en I

On considère deux sections de poutres : une section en "I" et une section pleine (voir figure VII.3).

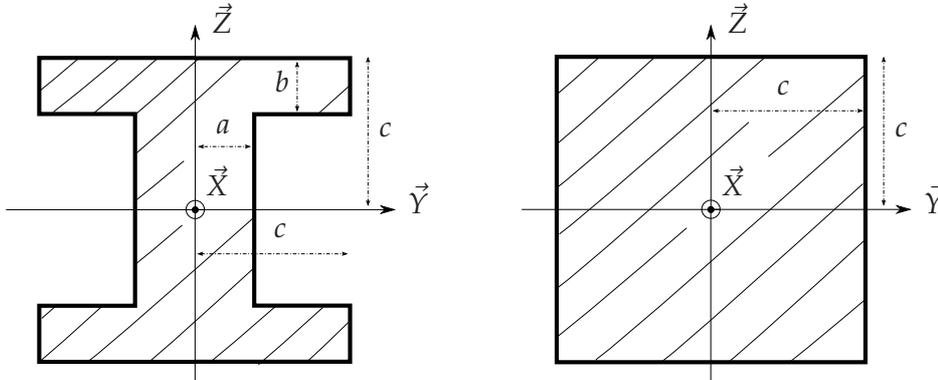


FIG. VII.3: Profilé en "I" et profilé plein.

1. Calculer I_Y pour les deux profilés.
2. Calculer les sections S des deux profilés.
3. On rappelle que I_Y traduit la rigidité en flexion autour de \vec{Y} . Par exemple, la flèche prise par une poutre encastree de longueur L et de module de Young E soumise à une force F à son extrémité est

$$v = \frac{FL^3}{3EI_Y}.$$

En considérant l'application numérique $a = 1$ cm, $b = 2$ cm, et $c = 5$ cm, commenter les valeurs de I_Y et S obtenues pour les deux profilés.

EXERCICE 4 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé tubulaire

On considère deux sections de poutres : une section circulaire creuse de rayons intérieur et extérieur R_i et R_e , et une section circulaire pleine de rayon R_e (voir figure VII.4).

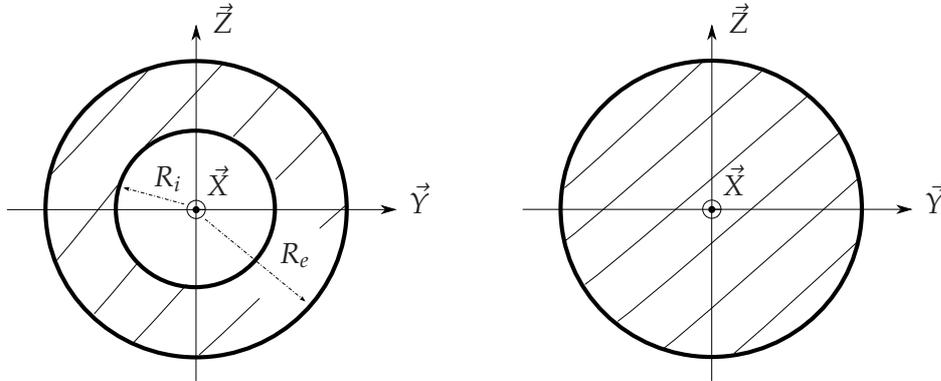


FIG. VII.4: Profilé circulaire creux et profilé circulaire plein.

1. Calculer I_Z pour les deux profilés.
2. Calculer les sections S des deux profilés.
3. Calculer, en fonction de $\alpha = R_i/R_e$ ($\alpha \in [0;1]$), le rapport $r_I = I_Z^{tube}/I_Z^{plein}$ et le rapport $r_S = S^{tube}/S^{plein}$. Représenter graphiquement ces rapports. Conclure.

EXERCICE 5 : Etude d'un portique articulé-appuyé

On considère la structure de la figure VII.5.

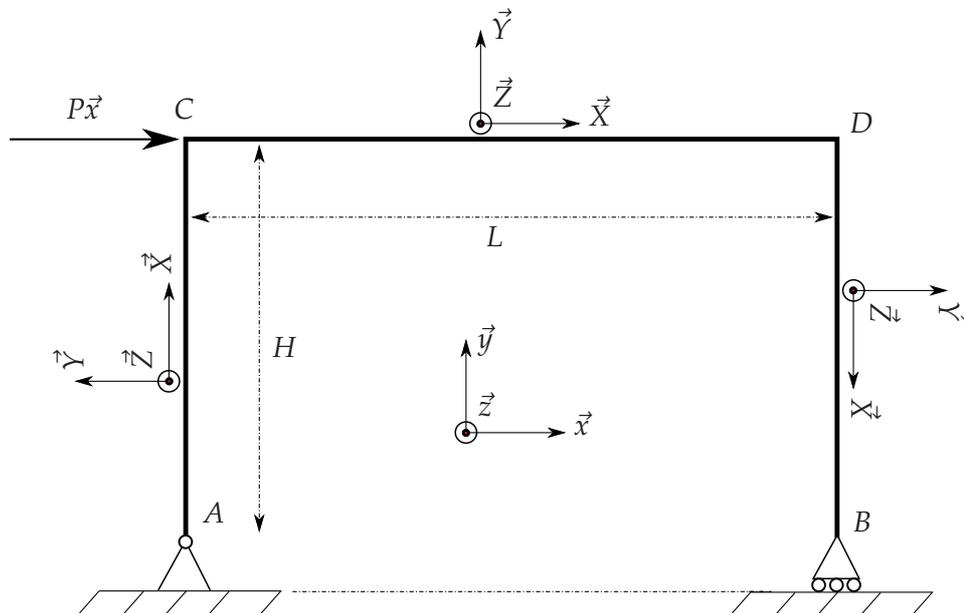


FIG. VII.5: Portique articulé-appuyé.

Le portique est articulé en A et appuyé sur rouleaux en B. Il est soumis à une force horizontale $P\vec{x}$, $P > 0$, au point C. Calculer et représenter graphiquement les efforts intérieurs régnant dans toute la structure. Vérifier les équations d'équilibre local.

EXERCICE 6 : Etude d'une poutre encastrée

On considère la structure de la figure VII.6.

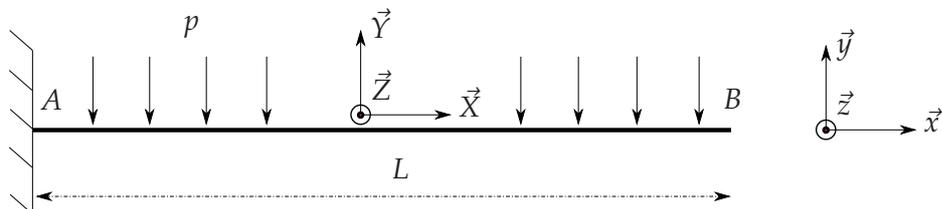


FIG. VII.6: Poutre encastrée soumise à une densité linéique de force sur toute sa longueur.

La poutre est encastrée en A et soumise à une densité linéique de force p sur toute sa longueur L . Calculer et représenter graphiquement les efforts intérieurs régnant dans toute la structure. Vérifier les équations d'équilibre local.

EXERCICE 7 : Profil d'un château d'eau

On considère un château d'eau portant une masse M , conformément à la figure VII.7 :

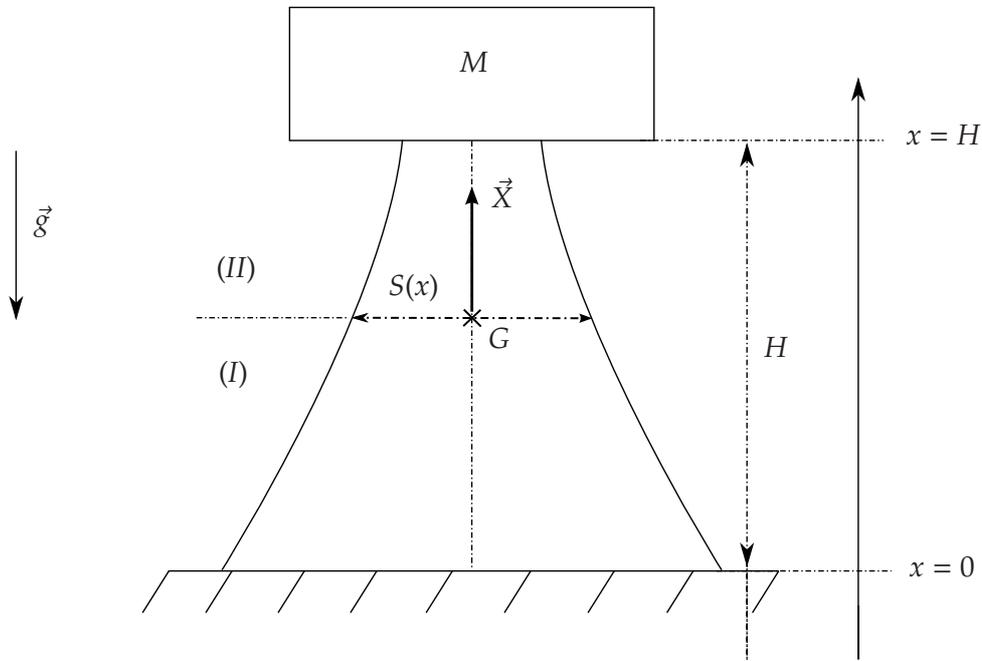


FIG. VII.7: Château d'eau supportant une masse M .

Le château d'eau est supposé suffisamment élancé (Longueur/Diamètre $\gg 1$) pour pouvoir être étudié par la théorie des poutres. Il est encasturé en $x = 0$, et supporte une masse M posée en $x = H$.

En prenant en compte le poids propre du béton et le poids de M , quelle doit être la forme (c'est à dire la répartition de section $S(x)$) du château d'eau pour que la contrainte de compression σ_{XX} soit égale à une constante $\sigma < 0$ dans toute la structure ? On donne :

- ρ la masse volumique du béton constituant le tronçon $x \in [0; H]$,
- g l'accélération de la pesanteur.

EXERCICE 8 : Etude de la déformée d'une poutre soumise à un moment

Soit la structure de la figure VII.8.

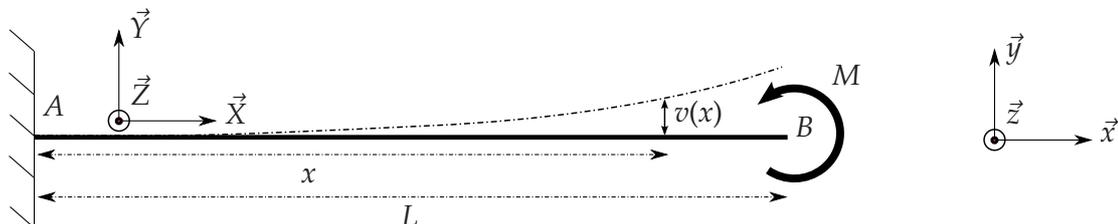


FIG. VII.8: Poutre encastree soumise à un moment à son extrémité.

La poutre est encastree en A et soumise en B à un moment extérieur M . Calculer, à l'aide des formules de Bresse, la flèche $v(x)$, c'est à dire le déplacement vertical d'un point situé à une distance x du point A ($x \in [0; L]$). On négligera la contribution de l'effort tranchant si celui-ci est non nul.

EXERCICE 9 : Etude d'un ressort à lame

On considère la structure de la figure VII.9, appelée "ressort à lame".

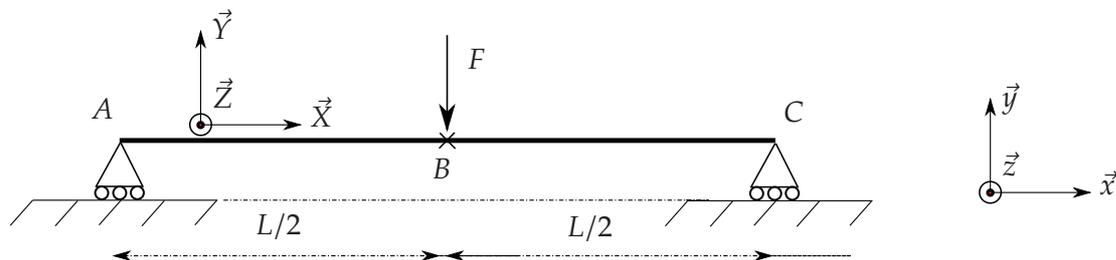


FIG. VII.9: Poutre bi-appuyée constituant un ressort à lame.

La poutre est simplement appuyée à ses extrémités A et C et soumise à une force F en son centre B . En supposant que la rotation $\vec{\omega}_B$ de la section plane Σ_B est nulle (justifier cette hypothèse), et en négligeant la contribution de l'effort tranchant, calculer la raideur apparente de la poutre. Commenter la formule ainsi obtenue.

Note : ce type de ressort peut par exemple être employé pour réaliser des suspensions de véhicules, voir figure VII.10.



FIG. VII.10: Amortisseur à lames constitué par la superposition de plusieurs lames travaillant en flexion (référence : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Leafs1.jpg>)

EXERCICE 10 : Rupture d'une poutre en flexion

Soit la structure de la figure VII.11.

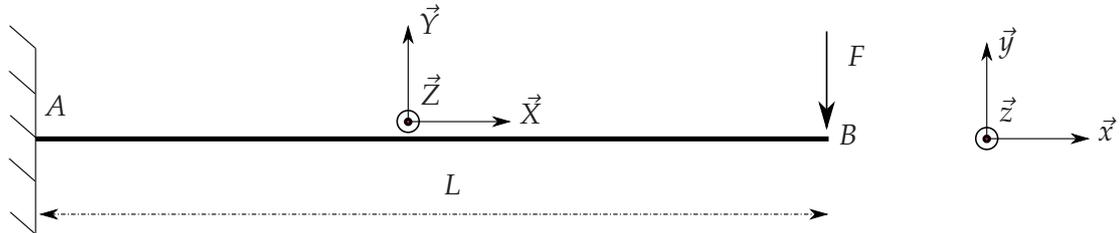


FIG. VII.11: Poutre encastree soumise à une force à son extrémite.

La poutre (de longueur L) est encastree en A et soumise à une force verticale F à son extrémite B . En considerant que la structure verifie un critere de rupture de type Tresca :

$$\max_{I,J \in \{1,2,3\}} \max_{x,y,z} |\sigma_I(x,y,z) - \sigma_J(x,y,z)| \leq C \quad (\text{VII.1})$$

avec σ_1, σ_2 , et σ_3 les contraintes principales et C une constante determinee experimentalement, pour quelle force F la poutre cassera ? En quel(s) point(s) la rupture aura-t-elle lieu ? On negligera l'effort tranchant dans tout l'exercice.

EXERCICE 11 : Etude d'une structure hyperstatique

Soit le portique représenté sur la figure VII.12.

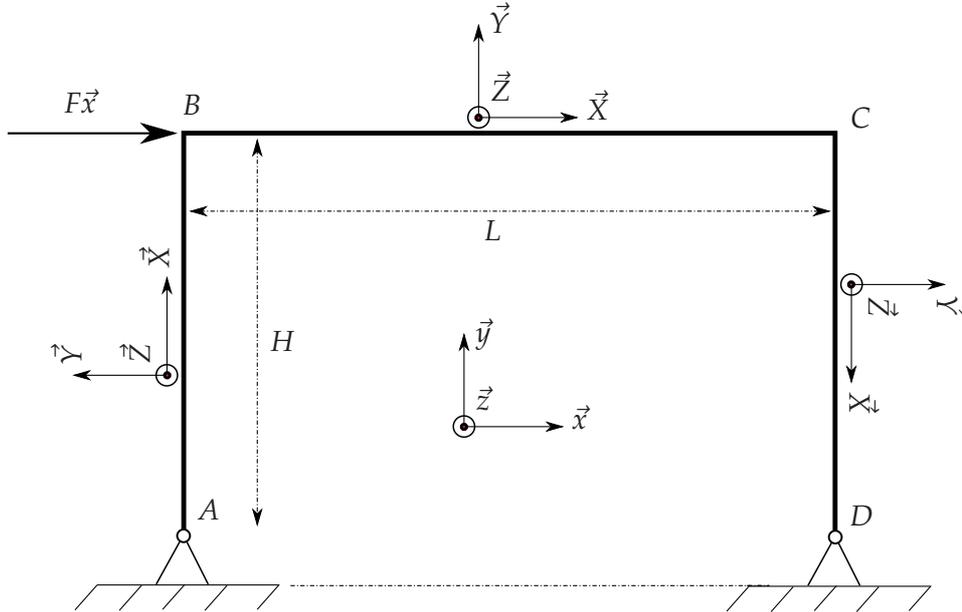


FIG. VII.12: Portique articulé-articulé.

Le portique est articulé en A et en D . Il est soumis à une force horizontale $F\vec{x}$ en B . Calculer le déplacement de B en levant l'hyperstaticité (on négligera les contributions de l'effort tranchant et de l'effort normal dans le calcul de l'énergie de déformation).

EXERCICE 12 : Etude d'une liaison imparfaite

On considère la structure de la figure VII.13.

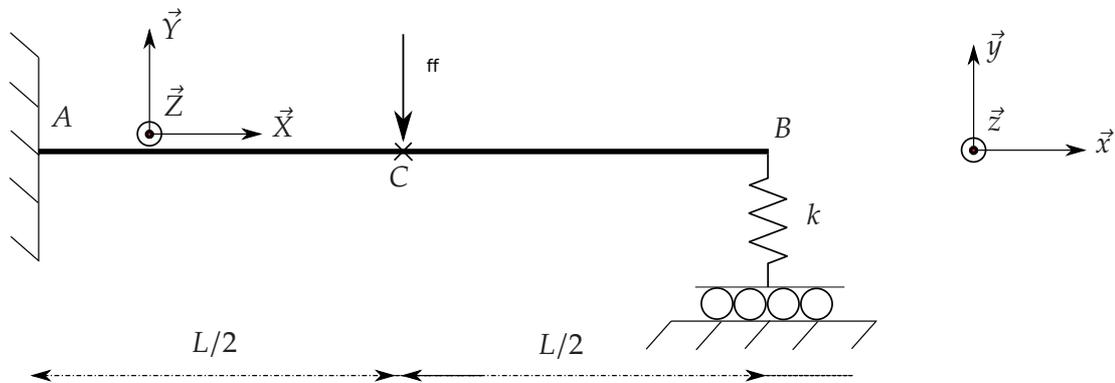


FIG. VII.13: Poutre encastrée reposant sur un appui imparfait.

La poutre est encastrée en A et repose sur un appui sur rouleaux imparfait en B , assimilable à un ressort de raideur k . Elle est soumise à une force verticale F en son milieu C . Ecrire l'équilibre de la structure, lever l'hyperstaticité, et discuter les cas où $k \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$.

EXERCICE 13 : Etude de la stabilité d'un toit de galerie

On considère une galerie dont le toit est soutenu par plusieurs piliers (figure VII.14) :

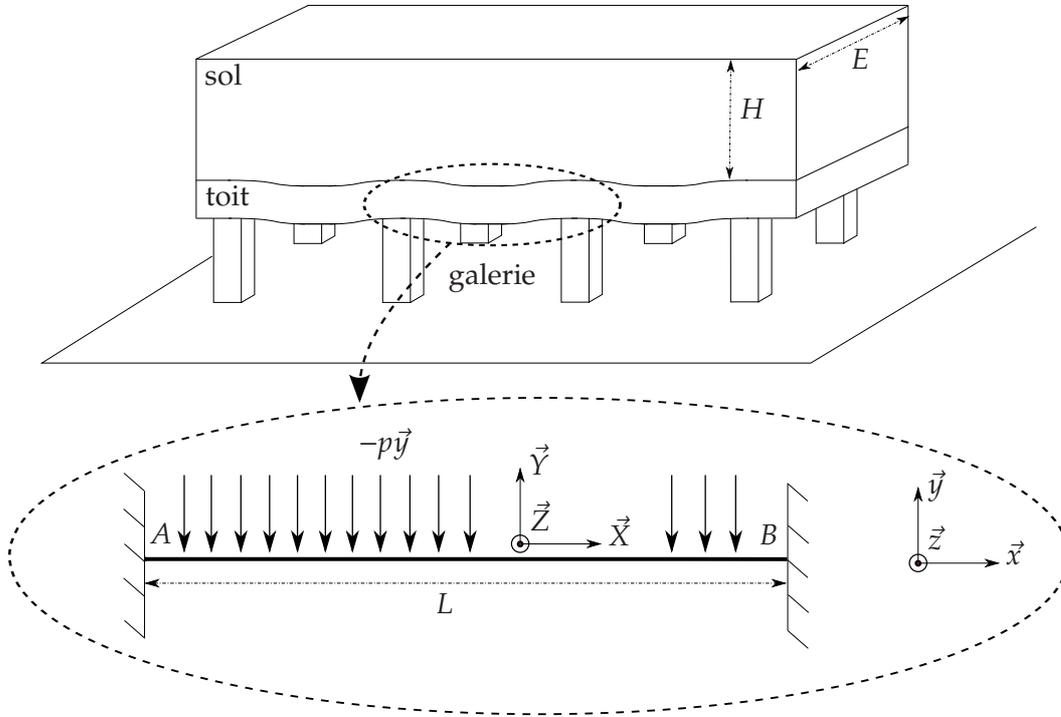


FIG. VII.14: Modélisation en 1D du toit d'une galerie.

On modélise la tranche de toit située entre deux piliers par une poutre encastree/encastree. Cette poutre est soumise à un chargement réparti p égal à la somme de son poids propre et du poids total du sol, le tout exprimé par unité de longueur. Ecrire l'équilibre de la structure, et lever l'hyperstaticité. En prenant un coefficient de sécurité de α sur la contrainte de rupture, quelle doit être la longueur L entre deux piliers pour garantir la stabilité du toit ?

Indications :

- on considerera que la structure vérifie un critère de rupture de type Tresca :

$$\max_{I, J \in \{1, 2, 3\}} \max_{x, y, z} |\sigma_I(x, y, z) - \sigma_J(x, y, z)| \leq C \tag{VII.2}$$

avec σ_1, σ_2 , et σ_3 les contraintes principales et C une constante déterminée expérimentalement.

- on gardera tous les efforts intérieurs dans le calcul de l'énergie. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel comme Mathematica[©] semble alors inévitable.
- on ne prendra en compte que le moment fléchissant pour appliquer le critère de rupture.

EXERCICE 14 : Problème-type donné à la colle

Soit la potence représentée sur la figure VII.15.

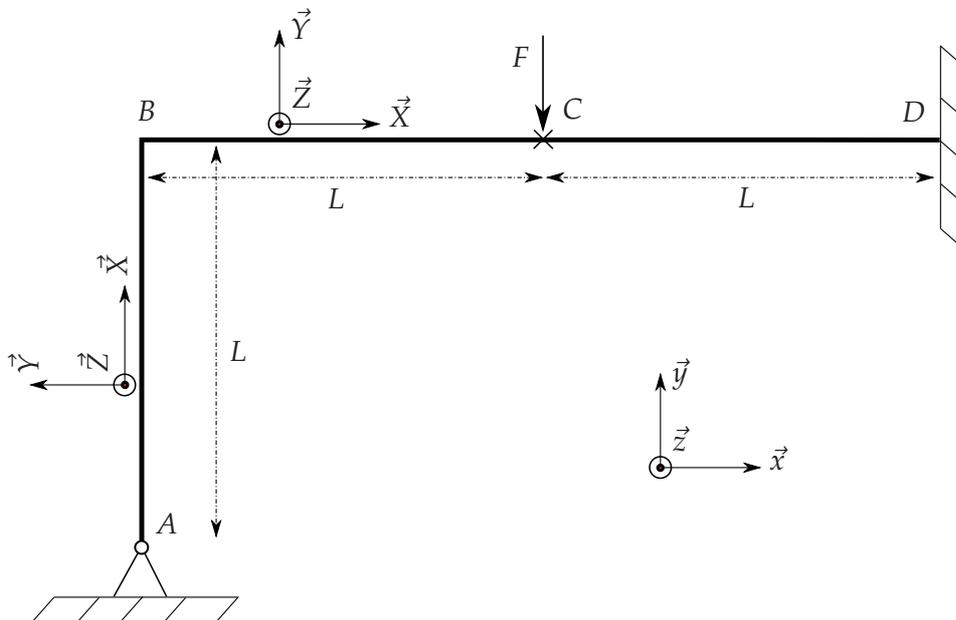


FIG. VII.15: Potence articulée-encastée.

La potence est articulée en A et encastée en D. Elle est soumise à une force verticale F au point C.

1. Ecrire l'équilibre de la structure et calculer les efforts intérieurs
2. Calculer le déplacement vertical de C par la méthode de Castigliano. On prendra pour inconnues hyperstatiques X_A et Y_A .
3. Recalculer ce même déplacement à l'aide des formules de Bresse.
4. En négligeant N et T_Y , donner l'allure des cercles de Mohr.
5. Toujours en négligeant N et T_Y , pour quelle valeur de F la structure va t-elle casser ? On supposera un critère de rupture de type Tresca :

$$\max_{I, J \in \{1, 2, 3\}} \max_{x, y, z} |\sigma_I(x, y, z) - \sigma_J(x, y, z)| \leq C \quad (\text{VII.3})$$

avec σ_1 , σ_2 , et σ_3 les contraintes principales et C une constante déterminée expérimentalement.

Pour le "fun", l'allure de la déformée est calculée à l'aide d'un programme Mathematica (voir page suivante).

(* Programme réalisé par Théophile GUILLON *)

Clear[x, y, i, F, L, e, EIz, Pts, amplidep, amplirot, NbreSections];

(*Moments fléchissants de chaque poutre [CD], [BC] et [AB] *)

MzCD = F/40 * (34 * L - 23 * u);

MzBC = F/40 * (17 * u - 6 * L);

MzAB = -3F/20 * u;

(*A partir des formules de Bresses, on détermine les rotations*)

(*et les déplacements en tout point de chaque tronçon. Les calculs *)

(*sur [CD] et [BC] se font à partir du point C (déplacements et rotations nuls). *)

(*Toujours à partir du point C, la rotation en A wa est déterminée *)

(*puis les déplacements et rotations dans la poutre [AB] sont déduits *)

(*à partir de A (wa connue, déplacements nuls).*)

RotCD = FullSimplify[Integrate[MzCD/EIz, {u, 2 * L, x}]];

DepCD = FullSimplify[Integrate[MzCD/EIz * (x - u), {u, 2 * L, x}]];

RotBC = FullSimplify[Integrate[MzCD/EIz, {u, 2 * L, L}] + Integrate[MzBC/EIz, {u, L, x}]];

DepBC = FullSimplify[Integrate[MzCD/EIz * (x - u), {u, 2 * L, L}] +

Integrate[MzBC/EIz * (x - u), {u, L, x}]];

wa = FullSimplify[Integrate[MzCD/EIz, {u, 2 * L, L}] + Integrate[MzBC/EIz, {u, L, 0}] +

Integrate[MzAB/EIz, {u, L, 0}]];

RotAB = FullSimplify[wa + Integrate[MzAB/EIz, {u, 0, y}]];

DepAB = FullSimplify[-Integrate[MzAB/EIz * (y - u), {u, 0, y}] - y * wa];

(*Arbitrairement, on impose un effort F=10kN, une longueur L de 4m, *)

(*une section carrée de côté e=50cm et un module de Young E=210GPa. *)

F = 10000;

L = 4;

e = 0.5;

EIz = 210 * 10⁹ * 4/3 * (e/2)⁴;

(*La fibre moyenne de chaque travée est une polyligne de Pts=100 points. *)

(*NbreSections=30 sections déformées sont tracées par tronçon. *)

Pts = 100;

NbreSections = 30;

(*Connaissant les positions initiales et les déplacements en tout point, *)

(*les coordonnées de chaque point de la fibre moyenne déformée sont calculées *)

(*pour chaque tronçon. NB : les amplifications amplidep et amplirot sont fixées *)

(*au moment de tracer la déformée. *)

(*Les rotations de chaque section étant connues, il est possible de calculer *)

(*les coordonnées des fibres supérieure et inférieure déformées. *)

```

FibreMoyCD = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[FibreMoyCD], i++,
FibreMoyCD[[i]] = {x, y + DepCD * amplidep} //. {x → 2L + (1 - i)/(Pts - 1) * L, y → L};
];
PointsCDsup = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[PointsCDsup], i++,
PointsCDsup[[i]] =
{x - e/2 * Sin[RotCD * amplirot], y + DepCD * amplidep + e/2 * Cos[RotCD * amplirot]} //.
{x → 2L + (1 - i)/(Pts - 1) * L, y → L};
];
PointsCDinf = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[PointsCDinf], i++,
PointsCDinf[[i]] =
{x + e/2 * Sin[RotCD * amplirot], y + DepCD * amplidep - e/2 * Cos[RotCD * amplirot]} //.
{x → 2L + (1 - i)/(Pts - 1) * L, y → L};
];

```

```

FibreMoyBC = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[FibreMoyBC], i++,
FibreMoyBC[[i]] = {x, y + DepBC * amplidep} //. {x → L + (1 - i)/(Pts - 1) * (L + e/2), y → L};
];
PointsBCsup = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[PointsBCsup], i++,
PointsBCsup[[i]] =
{x - e/2 * Sin[RotBC * amplirot], y + DepBC * amplidep + e/2 * Cos[RotBC * amplirot]} //.
{x → L + (1 - i)/(Pts - 1) * (L + e/2), y → L};
];
PointsBCinf = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[PointsBCinf], i++,
PointsBCinf[[i]] =
{x + e/2 * Sin[RotBC * amplirot], y + DepBC * amplidep - e/2 * Cos[RotBC * amplirot]} //.
{x → L + (1 - i)/(Pts - 1) * (L + e/2), y → L};
];

```

(*Sur [AB] la fibre supérieure est la plus à l'extérieur, *)
i.e. la plus à gauche sur le schéma. *)

```

FibreMoyAB = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[FibreMoyAB], i++,
FibreMoyAB[[i]] = {x + DepAB * amplidep, y} //. {x → 0, y → L - e/2 + (1 - i)/(Pts - 1) * (L - e/2)};
];
PointsABsup = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[PointsABsup], i++,
PointsABsup[[i]] =
{x + DepAB * amplidep - e/2 * Cos[RotAB * amplirot], y - e/2 * Sin[RotAB * amplirot]} //.
{x → 0, y → L - e/2 + (1 - i)/(Pts - 1) * (L - e/2)};
];

```

```

];
PointsABinf = Table[0, {i, 1, Pts}];
For[i = 1, i ≤ Length[PointsABinf], i++,
PointsABinf[[i]] =
{x + DepAB * amplidep + e/2 * Cos[RotAB * amplirot], y + e/2 * Sin[RotAB * amplirot]}//.
{x → 0, y → L - e/2 + (1 - i)/(Pts - 1) * (L - e/2)};
];

```

(* Stockage des sections sur chaque tronçon *)

```

ListeSectionsCD = {};
ListeSectionsCD = Append[ListeSectionsCD, {PointsCDinf[[1]], PointsCDsup[[1]]}];
For[i = 1, i ≤ NbreSections, i++,
ListeSectionsCD = Append[ListeSectionsCD,
{PointsCDinf[[Floor[i * Pts/NbreSections]]],
PointsCDsup[[Floor[i * Pts/NbreSections]]]}];
];
ListeSectionsCD = Append[ListeSectionsCD, PointsCDsup];
ListeSectionsCD = Append[ListeSectionsCD, PointsCDinf];

```

```

ListeSectionsBC = {};
ListeSectionsBC = Append[ListeSectionsBC, {PointsBCinf[[1]], PointsBCsup[[1]]}];
For[i = 1, i ≤ NbreSections, i++,
ListeSectionsBC = Append[ListeSectionsBC,
{PointsBCinf[[Floor[i * Pts/NbreSections]]],
PointsBCsup[[Floor[i * Pts/NbreSections]]]}];
];
ListeSectionsBC = Append[ListeSectionsBC, PointsBCsup];
ListeSectionsBC = Append[ListeSectionsBC, PointsBCinf];

```

```

ListeSectionsAB = {};
ListeSectionsAB = Append[ListeSectionsAB, {PointsABinf[[1]], PointsABsup[[1]]}];
For[i = 1, i ≤ NbreSections, i++,
ListeSectionsAB = Append[ListeSectionsAB,
{PointsABinf[[Floor[i * Pts/NbreSections]]],
PointsABsup[[Floor[i * Pts/NbreSections]]]}];
];
ListeSectionsAB = Append[ListeSectionsAB, PointsABsup];
ListeSectionsAB = Append[ListeSectionsAB, PointsABinf];

```

(*L'ensemble des segments à tracer ainsi que leurs options de traçage sont stockés. *)
(* Au total sont stockées 3 fibres moyennes déformées, 3 fibres supérieures déformées, *)
(* 3 fibres inférieures déformées et 3*NbreSections sections. *)

```

ListeTot = {};
Affichage = {};

```

```
ListeTot = Append[ListeTot, FibreMoyCD];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[0.5, 0, 0], Dashing[Tiny]};
For[i = 1, i ≤ Length[ListeSectionsCD], i++,
ListeTot = Append[ListeTot, ListeSectionsCD[[i]];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[None]};
];
```

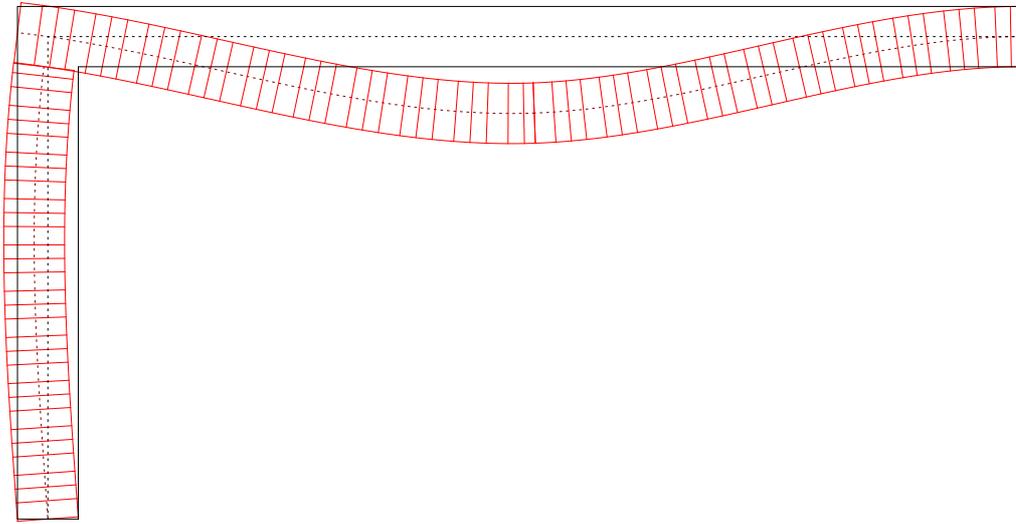
```
ListeTot = Append[ListeTot, FibreMoyBC];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[0.5, 0, 0], Dashing[Tiny]};
For[i = 1, i ≤ Length[ListeSectionsBC], i++,
ListeTot = Append[ListeTot, ListeSectionsBC[[i]];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[None]};
];
```

```
ListeTot = Append[ListeTot, FibreMoyAB];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[0.5, 0, 0], Dashing[Tiny]};
For[i = 1, i ≤ Length[ListeSectionsAB], i++,
ListeTot = Append[ListeTot, ListeSectionsAB[[i]];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[None]};
];
```

(*On trace aussi la forme de la structure avant déformation (avec la fibre moyenne). *)

```
FormeInit = {{e/2, 0}, {e/2, L - e/2}, {2 * L, L - e/2}, {2 * L, L + e/2}, {-e/2, L + e/2},
{-e/2, 0}, {e/2, 0}};
ListeTot = Append[ListeTot, FormeInit];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[0, 0, 0], Dashing[None]};
FibreInit = {{0, 0}, {0, L}, {2 * L, L}};
ListeTot = Append[ListeTot, FibreInit];
Affichage = Append[Affichage, {RGBColor[0, 0, 0], Dashing[Tiny]};

amplidep = 20000;
amplirot = 20000;
ListPlot[ListeTot, Joined → True, PlotRange → {{-1, 2 * L + 1}, {-1, L + 1}},
AspectRatio → (L + 2)/(2 * L + 2), Axes → False, PlotStyle → Affichage]
```



Chapitre VIII

Éléments de correction des TD

Sommaire

| | |
|--|-----|
| Exercice 1 : Equilibre d'une grue | 92 |
| Exercice 2 : Equilibre d'une arche soumise au vent | 93 |
| Exercice 3 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé en I | 94 |
| Exercice 4 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé tubulaire | 95 |
| Exercice 5 : Etude d'un portique articulé-appuyé | 96 |
| Exercice 6 : Etude d'une poutre encastree | 97 |
| Exercice 7 : Profil d'un château d'eau | 98 |
| Exercice 8 : Etude de la déformée d'une poutre soumise à un moment | 99 |
| Exercice 9 : Etude d'un ressort à lame | 100 |
| Exercice 10 : Rupture d'une poutre en flexion | 101 |
| Exercice 11 : Etude d'une structure hyperstatique | 102 |
| Exercice 12 : Etude d'une liaison imparfaite | 103 |
| Exercice 13 : Etude de la stabilité d'un toit de galerie | 104 |
| Exercice 14 : Problème-type donné à la colle | 105 |

EXERCICE 1 : Equilibre d'une grue

- Torseur de liaison :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

- Torseur de chargement ponctuel :

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

- Torseur de chargement réparti :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathcal{T}_G^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -\lambda dy \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad \text{si } G \in [AB] \\ \{\mathcal{T}_G^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -\lambda dx \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad \text{si } G \in [BC] \end{array} \right.$$

- Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = mg + \lambda(H + L) \\ M_A = mgL + \lambda L^2/2 \end{array} \right.$$

- La structure est isostatique.

EXERCICE 2 : Equilibre d'une arche soumise au vent

- Torseurs de liaisons :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ U_A \vec{x} + V_A \vec{y} + W_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$
$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- Torseur de chargement réparti :

$$\{d\mathcal{T}_G^C\} = \left\{ \begin{array}{l} -fRd\theta \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

- Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A - fR\pi = 0 \\ U_A - 2fR^2 = 0 \\ V_A - f\pi R^2 = 0 \\ W_A - 2RY_B = 0 \end{array} \right.$$

- La structure est hyperstatique de degré 1.

EXERCICE 3 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé en I

- Moment quadratique du profilé en I :

$$I_Y^I = \frac{4}{3}ac^3 + 4(c-a)\frac{(c^3 - (c-b)^3)}{3}$$

- Moment quadratique du profilé plein :

$$I_Y^{\text{plein}} = \frac{4}{3}c^4$$

- Section du profilé en I :

$$S^I = 4(ac + (c-a)b)$$

- Section du profilé plein :

$$S^{\text{plein}} = 4c^2$$

- Application numérique :

$$I_Y^I = 689 \text{ cm}^4, \quad I_Y^{\text{plein}} = 833 \text{ cm}^4, \quad S^I = 52 \text{ cm}^2, \quad S^{\text{plein}} = 100 \text{ cm}^2$$

EXERCICE 4 : Calcul du moment d'inertie d'un profilé tubulaire

- ▶ Moment quadratique du profilé creux :

$$I_Z^{tube} = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4)$$

- ▶ Moment quadratique du profilé plein :

$$I_Z^{plein} = \frac{\pi}{4} R_e^4$$

- ▶ Section du profilé creux :

$$S^{tube} = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

- ▶ Section du profilé plein :

$$S^{plein} = \pi R_e^2$$

- ▶ Rapports :

$$r_I = I_Z^{tube} / I_Z^{plein} = 1 - \alpha^4, \quad r_S = S^{tube} / S^{plein} = 1 - \alpha^2$$

- ▶ Applications numériques :

$$\alpha = 0.5 \quad \rightarrow \quad r_I = 0.94, \quad r_S = 0.75$$

$$\alpha = 0.7 \quad \rightarrow \quad r_I = 0.76, \quad r_S = 0.51$$

EXERCICE 5 : Etude d'un portique articulé-appuyé

- Torseurs de liaisons :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- Torseur de chargement ponctuel :

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} P \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

- Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + P = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ LY_B - HP = 0 \end{array} \right.$$

- La structure est isostatique.

- Efforts intérieurs :

$$G \in [AC] : \left\{ \begin{array}{l} N = PH/L \\ T_Y = -P \\ M_Z = yP \end{array} \right.$$

$$G \in [CD] : \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_Y = PH/L \\ M_Z = (L-x)PH/L \end{array} \right.$$

$$G \in [DB] : \left\{ \begin{array}{l} N = -PH/L \\ T_Y = 0 \\ M_Z = 0 \end{array} \right.$$

EXERCICE 6 : Etude d'une poutre encastree

- Torseurs de liaisons :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

- Torseur de chargement repartit :

$$\{d\mathcal{T}_G^C\} = \left\{ \begin{array}{l} -p dx \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

- Equilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = pL \\ M_A = pL^2/2 \end{array} \right.$$

- La structure est isostatique.
- Efforts interieurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_Y = p(x - L) \\ M_Z = -p(x - L)^2/2 \end{array} \right.$$

EXERCICE 7 : Profil d'un château d'eau

- Première expression de l'effort normal :

$$N = \sigma_{XX}S(x) = \sigma S(x)$$

- Deuxième expression de l'effort normal :

$$N = [\text{Résultante de } \{\mathcal{T}_{int}\}] \cdot \vec{X} = \vec{F}_{ext \rightarrow (II)} \cdot \vec{X} = \left(\int_x^H -\rho g S(x) \vec{X} dx - Mg \vec{X} \right) \cdot \vec{X}$$

- En identifiant ces deux dernières expressions :

$$-\rho g \int_x^H S(x) dx - Mg = \sigma S(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dx} - \frac{\rho g}{\sigma} S = 0$$

- Avec $S(H) = -Mg/\sigma$, on obtient :

$$S(x) = -\frac{Mg}{\sigma} \exp\left[\frac{\rho g}{\sigma}(x - H)\right]$$

EXERCICE 8 : Etude de la déformée d'une poutre soumise à un moment

- ▶ Torseur de liaison :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

- ▶ Torseur de chargement :

$$\{\mathcal{T}_B^C\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ M \vec{z} \end{array} \right\}_B$$

- ▶ Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = 0 \\ M_A = -M \end{array} \right.$$

- ▶ La structure est isostatique.

- ▶ Efforts intérieurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_Y = 0 \\ M_Z = M \end{array} \right.$$

- ▶ Formules de Bresse entre A et G (point courant de la poutre) :

$$\vec{\omega}_G = \frac{Mx}{EI_Z} \vec{z}, \quad \vec{\Lambda}_G = \frac{Mx^2}{2EI_Z} \vec{y}$$

- ▶ Flèche prise par la poutre :

$$v(x) = \frac{Mx^2}{2EI_Z}$$

EXERCICE 9 : Etude d'un ressort à lame

- On donne directement les efforts intérieurs :

$$G \in [AB] : \begin{cases} N = 0 \\ T_Y = -F/2 \\ M_Z = xF/2 \end{cases}$$

$$G \in [BC] : \begin{cases} N = 0 \\ T_Y = F/2 \\ M_Z = (L-x)F/2 \end{cases}$$

- Condition de symétrie :

$$\vec{\omega}_B = 0$$

- Première formule de Bresse entre B et A :

$$\vec{\omega}_A = -\frac{FL^2}{16EI_Z} \vec{Z}$$

- Deuxième formule de Bresse entre A et B :

$$\vec{\Lambda}_B = -\frac{FL^3}{48EI_Z} \vec{Y}$$

- Raideur équivalente en B :

$$v_B = \frac{FL^3}{48EI_Z} \Rightarrow k = \frac{48EI_Z}{L^3}$$

EXERCICE 10 : Rupture d'une poutre en flexion

- Torseur de liaison :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

- Torseur de chargement :

$$\{\mathcal{T}_B^C\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = F \\ M_A = FL \end{array} \right.$$

- La structure est isostatique.

- Efforts intérieurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_Y = -F \\ M_Z = F(x - L) \end{array} \right.$$

- Tenseur des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -M_Z Y / I_Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Critère de rupture :

$$\underbrace{\max_{x,Y} |\sigma_{XX}(x, Y)|}_{\text{maxi en } x=0 \text{ et } Y = \pm e/2} \leq C \Rightarrow F \leq \frac{2CI_Z}{eL} = F_{\text{rupture}}$$

- La rupture a lieu à l'encastrement ($x = 0$) sur une des facettes de la poutre ($Y = \pm e/2$).

EXERCICE 11 : Etude d'une structure hyperstatique

- Torseurs de liaison :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{T}_D^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_D \vec{x} + Y_D \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

- Torseur de chargement :

$$\{\mathcal{T}_B^C\} = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- Équilibre :

$$\begin{cases} X_A + X_D + F = 0 \\ Y_A + Y_D = 0 \\ -FH + Y_D L = 0 \end{cases}$$

- La structure est hyperstatique de degré 1. On prend $X_D = X$ comme inconnue hyperstatique.

- Efforts intérieurs :

$$G \in [AB] : \begin{cases} N = FH/L \\ T_Y = -F - X \\ M_Z = (F + X)y \end{cases}$$

$$G \in [BC] : \begin{cases} N = X \\ T_Y = FH/L \\ M_Z = XH + (L - x)FH/L \end{cases}$$

$$G \in [CD] : \begin{cases} N = -FH/L \\ T_Y = X \\ M_Z = yX \end{cases}$$

- Calcul de X en appliquant le théorème de Ménébréa ($\frac{\partial W}{\partial X} = 0$) :

$$W \approx \frac{1}{2} \int_{A \rightarrow D} \frac{M_Z^2}{EI_Z} ds \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial X} = \int_{A \rightarrow D} \frac{\partial M_Z}{\partial X} \frac{M_Z}{EI_Z} ds = 0 \Rightarrow X = -F/2$$

- Déplacement horizontal du point B (théorème de Castigliano) :

$$u_B = \vec{\Lambda}_B \cdot \vec{x} = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{A \rightarrow D} \frac{\partial M_Z}{\partial F} \frac{M_Z}{EI_Z} ds = \frac{FH^3}{6EI_Z} + \frac{FLH^2}{12EI_Z}$$

EXERCICE 12 : Etude d'une liaison imparfaite

- Torseurs de liaison :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$
$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{c} X \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- Torseur de chargement :

$$\{\mathcal{T}_C^C\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

- Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = F - X \\ M_A = FL/2 - XL \end{array} \right.$$

- Efforts intérieurs :

$$G \in [AC] : \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_Y = -F + X \\ M_Z = F(x - L/2) + X(L - x) \end{array} \right.$$

$$G \in [CB] : \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_Y = X \\ M_Z = X(L - x) \end{array} \right.$$

- Calcul de X en appliquant le théorème de Ménébréa sous une forme "généralisée" :

$$v_B = \vec{\Lambda}_B \cdot \vec{y} = \frac{\partial W}{\partial X} = \int_{A \rightarrow B} \frac{\partial M_Z}{\partial X} \frac{M_Z}{EI_Z} ds = -X/k \Rightarrow X = \frac{5kFL^3}{48EI_Z + 16kL^3}$$

- Cas limite :

$$k \rightarrow 0 \Rightarrow X = 0 \quad (\text{équivalent à une extrémité libre en } B)$$

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow X = \frac{5F}{16} \quad (\text{équivalent à un appui sur roulement en } B)$$

EXERCICE 13 : Etude de la stabilité d'un toit de galerie

- Torseurs de liaison :

$$\{\mathcal{T}_A^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ M_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{T}_B^L\} = \left\{ \begin{array}{l} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} \\ M_B \vec{z} \end{array} \right\}_B$$

- Torseur de chargement (en P d'abscisse u) :

$$\{d\mathcal{T}_P^C\} = \left\{ \begin{array}{l} -pdu \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

- Équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = -X_B \\ Y_A = pL - Y_B \\ M_A = pL^2/2 - LY_B - M_B \end{array} \right.$$

- La structure est hyperstatique de degré 3. On choisit les inconnues X_B , Y_B et M_B comme inconnues hyperstatiques.

- Efforts intérieurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = X_B \\ T_Y = Y_B + p(x - L) \\ M_Z = M_B - p(L - x)^2/2 + (L - x)Y_B \end{array} \right.$$

- Calcul de l'énergie (Mathematica[©]) :

$$W = \frac{L(ES(20EI_Z k_Y(L^2 p^2 - 3LpY_B + 3Y_B^2)) + GS(L^2(3L^2 p^2 - 15LpY_B + 20Y_B^2) - 20LM_B(Lp - 3Y_B) + 60M_B^2)) + 60EI_Z GS X_B^2}{120EI_Z ESGS}$$

- Calcul de X_B , Y_B et M_B en appliquant le théorème de Ménabréa :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial W / \partial X_B = 0 \\ \partial W / \partial Y_B = 0 \\ \partial W / \partial M_B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_B = 0 \\ Y_B = pL/2 \\ M_B = -pL^2/12 \end{array} \right.$$

- Critère de rupture (en prenant un coefficient de sécurité de α) :

$$\max_{x,Y} |\sigma_{XX}(x, Y)| \leq C/\alpha \Leftrightarrow \max_{x,Y} \left| \frac{M_Z(x)Y}{I_Z} \right| \leq C/\alpha$$

Le maximum est atteint en $x = 0$ (ou $x = L$) et $Y = \pm e/2$. Le critère se réécrit :

$$\left| \frac{pL^2}{12} \right| \left| \frac{e}{2I_Z} \right| \leq C/\alpha \Rightarrow L \leq \sqrt{\frac{24CI_Z}{\alpha ep}}$$

EXERCICE 14 : Problème-type donné à la colle

► Équilibre :

$$\begin{cases} X_A + X_D = 0 \\ Y_A + Y_D - F = 0 \\ M_D - LX_D + 2LY_D - FL = 0 \end{cases}$$

► La structure est hyperstatique de degré 2. On choisit $X_A = X$ et $Y_A = Y$ comme inconnues hyperstatiques.

► Efforts intérieurs :

$$G \in [AB] : \begin{cases} N = -Y \\ T_Y = X \\ M_Z = -yX \end{cases}$$

$$G \in [BC] : \begin{cases} N = -X \\ T_Y = -Y \\ M_Z = -XL + xY \end{cases}$$

$$G \in [CD] : \begin{cases} N = -X \\ T_Y = F - Y \\ M_Z = (Y - F)x + (F - X)L \end{cases}$$

► Calcul de X et Y en appliquant le théorème de Ménabréa ($\frac{\partial W}{\partial X} = 0$ et $\frac{\partial W}{\partial Y} = 0$) :

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \int_{A \rightarrow D} \frac{\partial M_Z}{\partial X} \frac{M_Z}{EI_Z} ds = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = \int_{A \rightarrow D} \frac{\partial M_Z}{\partial Y} \frac{M_Z}{EI_Z} ds = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{3F}{20}, \quad Y = \frac{17F}{40}$$

► Déplacement vertical de C (théorème de Castigliano) :

$$v_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{13FL^3}{240EI_Z}$$

► Déplacement total de C (formules de Bresse entre D et C) :

$$\vec{\Lambda}_C = \underbrace{\vec{\Lambda}_D}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega}_D}_{=\vec{0}} \wedge \vec{DC} + \int_{G \in [CD]} \frac{M_Z}{EI_Z} \vec{Z} \wedge \vec{GC} ds = -\frac{13FL^3}{240EI_Z} \vec{Y}$$

► Tenseur des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -M_Z Y / I_Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

► Critère de rupture :

$$\max_{s, Y} |\sigma_{XX}(s, Y)| \leq C$$

avec :

$$\text{sur } [AB] : |\sigma_{XX}(y, Y)| \text{ maxi en } y = L \text{ et } Y \pm e/2, \text{ et } |\sigma_{XX}(y, Y)|_{max}^{[AB]} = \frac{3}{40} \frac{FLe}{I_Z}$$

$$\text{sur } [BC] : |\sigma_{XX}(x, Y)| \text{ maxi en } x = L \text{ et } Y \pm e/2, \text{ et } |\sigma_{XX}(x, Y)|_{max}^{[BC]} = \frac{11}{80} \frac{FLe}{I_Z}$$

$$\text{sur } [CD] : |\sigma_{XX}(x, Y)| \text{ maxi en } x = 2L \text{ et } Y \pm e/2, \text{ et } |\sigma_{XX}(x, Y)|_{max}^{[CD]} = \frac{3}{20} \frac{FLe}{I_Z}$$

- Comme $3/20 > 11/80 > 3/40$, la rupture a lieu en $x = 2L$ et $Y \pm e/2$, et le critère de rupture se réécrit :

$$F \leq \frac{20CI_Z}{3eL} = F_{rupture}$$

Conclusion

En guise de synthèse, écrivons que nous avons étudié la résolution de problèmes de RDM, en insistant plus particulièrement sur les équations régissant les poutres planes.

Pour conclure ce cours, il est important de souligner qu'une infime partie de la RDM a été abordée. En particulier, un bon nombre de points supplémentaires pourraient être développés. Citons, en guise d'ouverture, et parmi tant d'autres :

- l'étude de la torsion pour une poutre de section quelconque,
- la réécriture des équations d'équilibre en terme de grandes déformations,
- la considération de lois de comportement plus complexes que l'élasticité linéaire (visco-élasticité, viscoplasticité),
-

Bibliographie

- [1] S. Laroze. *Mécanique des structures : Tome 1 - solides élastiques, plaques et coques*. Eyrolles - Masson, 1988.
- [2] S. Laroze. *Mécanique des structures : Tome 2 - Poutres*. Eyrolles - Masson, 1988.
- [3] J.-F. Schmitt. *Théorie des poutres*. Cours de l'ENSEM, 1999.