Synthèse sur les groupes de Lie

par

Vincent MAGNENET

version 1.0 - Janvier 2005

Table des Matières

[1] Traduction naïve et simplifiée de "*evolutionary representative vector field*", Olver, [Olv-1989].

Avant propos

Le but de cette synthèse est de présenter les principaux résultats à connaître sur les groupes de symétries continues, encore appelés groupes de Lie. Le point de vue adopté est celui du mécanicien en quête d'outils mathématiques utiles et vite applicables. Par conséquent, le lecteur ne trouvera aucune démonstration aux théorèmes cités...

Chapitre I

Groupes à un paramètre

Sommaire

I.1 Qu'est-ce-qu'un groupe de transformation à un paramètre ?

I.1.1 Cadre de calcul et définition

Nous nous plaçons dans le cadre de calcul proposé par Olver ([Olv-1989]), dans lequel interviennent p variables dites indépendantes :

$$\boldsymbol{x} = \{x_i, i = 1..p\} \tag{I.1}$$

variant dans un ensemble X. Considérons également q variables dépendantes $\boldsymbol{u} = \{u_i(\boldsymbol{x}), i = 1..q\}$ dans un ensemble U, supposées de classe[1] C^∞ par rapport aux x_j. On désigne par $\boldsymbol{u}^{(n)}$ la réunion de toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n des u_i :

$$\boldsymbol{u}^{(n)} = \{u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}, \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}, \cdots\} = \{u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}, u_{i,jkl}, \cdots\}$$

Introduisons la notion de groupe de transformation à un paramètre en énonçant la :

DÉFINITION I.1.1 : ***Un groupe de transformation continu à un paramètre μ, est la donnée de plusieurs applications qui transforment le jeu de variables indépendantes x et dépendantes u :***

$$G : \left\{ \begin{array}{ll} \overline{x_j} = \overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) & j = 1..p \\ \overline{u_j} = \overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) & j = 1..q \end{array} \right. \tag{I.2}$$

Ces applications doivent respecter les 3 axiomes explicités par les relations (I.3), (I.4), (I.5), (I.6), (I.7), (I.8). ■

Les axiomes cités dans la définition (I.1.1) sont :

– La composition[2] : pour toutes les valeurs des paramètres μ_1 et μ_2 on doit avoir :

$$\overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_1) \circ \overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_2) = \overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_1 + \mu_2) \qquad j = 1..p \tag{I.3}$$

$$\overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_1) \circ \overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_2) = \overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_1 + \mu_2) \qquad j = 1..q \tag{I.4}$$

où "$\circ$" est une notation pour la composition des fonctions[3].

– L'existence d'un élément neutre : si $\overline{x}_j^\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ et $\overline{u}_j^\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ désignent les fonctions de transformations de la définition (I.1.1) pour une valeur donnée du paramètre μ, alors $\overline{x}_j^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ et $\overline{u}_j^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ doivent coïncider avec les applications identiques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$:

$$\overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu = 0) = x_j \qquad j = 1..p \tag{I.5}$$

$$\overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu = 0) = u_j \qquad j = 1..q \tag{I.6}$$

[1] Une fonction est de classe C^∞ si elle est infiniment différentiable. On note C^∞[X] l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur l'ensemble X.

[2] On ne s'intéresse dans cette synthèse qu'aux paramétrisations dites "canoniques". Il est en effet possible de généraliser cet axiome. Pour en savoir plus à ce sujet, voir Ibragimov, [Ibr-1995], pages 3-4.

[3] Par exemple, si f et g sont deux fonctions de x, alors $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

– L'existence d'un inverse au sens de la composition : pour toutes les valeurs du paramètre μ, on doit avoir :

$$\overline{x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},-\mu)\circ\overline{x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mu)=\overline{x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mu)\circ\overline{x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},-\mu)=x_j \qquad j=1..p \tag{I.7}$$

$$\overline{u_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},-\mu)\circ\overline{u_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mu)=\overline{u_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mu)\circ\overline{u_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},-\mu)=u_j \qquad j=1..q \tag{I.8}$$

Nous pouvons donner une idée de ce qu'est un groupe en considérant l'exemple :

EXEMPLE I.1.1 : L'application qui à tout instant t associe l'instant :

$$\bar{t}(t,\mu)=e^{\mu}t \tag{I.9}$$

est un groupe car nous avons :

– Pour l'axiome de composition :

$$\bar{t}=e^{\mu_1}t \ \text{ et } \ \bar{\bar{t}}=e^{\mu_2}\bar{t} \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{t}}=e^{\mu_1+\mu_2}t \tag{I.10}$$

– Pour l'axiome d'existence d'un élément neutre :

$$\bar{t}(t,0)=t \tag{I.11}$$

– Et pour l'axiome d'existence d'un inverse :

$$\bar{t}(\bar{t}(t,-\mu),\mu)=\bar{t}(\bar{t}(t,\mu),-\mu)=t \tag{I.12}$$

Considérons donc un groupe à un paramètre (noté ici μ) donné par les applications :

$$\overline{x_j}=\overline{x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mu) \qquad j=1..p \tag{I.13}$$

$$\overline{u_j}=\overline{u_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\mu) \qquad j=1..q \tag{I.14}$$

Par un développement de Taylor à l'ordre 1 autour de la valeur $\mu=0$, on peut introduire les variations associées aux $\{x_j\}$ et aux $\{u_j\}$ grâce à la :

DÉFINITION I.1.2 : ***Les p variations δx_j des variables dépendantes et les q variations δu_j des variables indépendantes sont données par les égalités :***

$$\overline{x_j}=x_j+\mu\frac{\partial\overline{x_j}}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=0}+o(\mu)=x_j+\delta x_j+o(\mu)=x_j+\mu\xi_j+o(\mu), \qquad \forall j=1..p \tag{I.15}$$

$$\overline{u_j}=u_j+\mu\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=0}+o(\mu)=u_j+\delta u_j+o(\mu)=u_j+\mu\phi_j+o(\mu), \qquad \forall j=1..q \tag{I.16}$$

où les fonctions $\xi_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\frac{\partial\overline{x_j}}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0}$ et $\phi_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0}$ sont respectivement appelées composantes horizontales et verticales du groupe. ■

Nous verrons plus loin la signification des termes “composantes horizontales et verticales du groupe”. Il est important de noter que ces variations sont a priori des fonctions des variables dépendantes et indépendantes : $\delta x_j=\delta x_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ et $\delta u_j=\delta u_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$. Nous Elles permettent de définir un champ de vecteur qui sera très utile dans la suite. Voyons comment.

I.1.2 Générateur associé à un groupe

Soit un groupe à un paramètre G, donné par les applications :

$$G : \begin{cases} \overline{x_i} = \overline{x_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) & i = 1..p \\ \overline{u_i} = \overline{u_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) & i = 1..q \end{cases} \tag{I.17}$$

qui doivent satisfaire les axiomes de composition, d'élément neutre et d'inversion. Le point de vue de la géométrie différentielle consiste (i) à considérer l'ensemble des couples $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ comme une surface généralisée notée $X \times U$ et appelée **variété**[4], de telle sorte que la donnée de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ est un point de cette "surface", et (ii) à voir les applications (I.17) comme la description paramétrique (vis à vis du paramètre μ) d'une courbe $\mathcal{C}$ obtenue par la réunion de tous les points $M(\mu)$ de coordonnées $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$ lorsque μ varie (voir figure I.1 **(a)**).

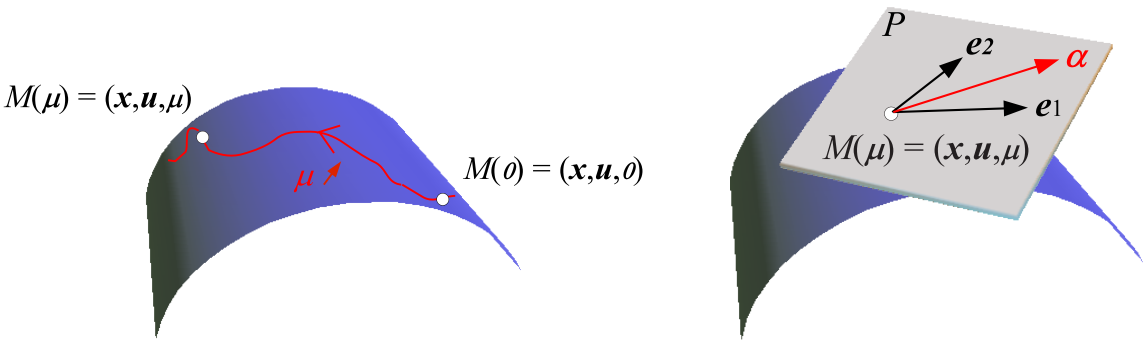

Fig. I.1: **(a)** : Représentation schématique d'un groupe : c'est l'ensemble de points $M(\mu)$ de coordonnées $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$ sur la variété $X \times U$ lorsque μ varie (courbe rouge) **(b)** : Plan tangent à une variété en un point $M(\mu)$ de coordonnées $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$. Les deux premiers vecteurs de base ont été représentés.

Avant de poursuivre, nous allons évoquer très succinctement les fondements de la géométrie différentielle. Revenons à la variété $X \times U$, et construisons le **plan tangent** à cette variété en un point $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$. En géométrie euclidienne, on peut montrer que ce plan noté P possède une structure d'espace vectoriel. Par suite, on peut décomposer tout vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ du plan P dans une base $\boldsymbol{e}_i$. En général, on choisit la base dite **canonique**, engendré par les vecteurs $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots)$, $\cdots$, (voir figure I.1 **(b)**). En géométrie différentielle, toutes ces concepts sont conservés, mais ils sont intégrés dans un cadre plus général. En effet, les vecteurs de base $\boldsymbol{e}_i$ du plan tangent en un point M à la variété $X \times U$ sont des opérateurs de dérivation partielle par rapport aux variables qui engendre cette variété[5]. Dans le cas de $X \times U$, retenons simplement que le plan tangent est engendré par combinaison linéaire de tous les vecteurs de base suivants :

$$\{\boldsymbol{e}_i, i = 1..p + q\} = \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}, i = 1..p \right\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}, i = 1..q \right\} \right\} \tag{I.18}$$

[4]En gros, une variété est un ensemble sur lequel on peut mesurer des coordonnées (voir par exemple Talpaert, [Tal-1993])

[5]On ne s'intéresse pas ici à la construction pas à pas de l'espace tangent et de sa base (voir une fois de plus Talpaert, [Tal-1993]). Le but est d'utiliser au plus vite les outils principaux relatifs aux groupes de Lie. Posez-vous la question : l'ouvrier qui plante un clou se demande t-il comment son marteau a été fabriqué ?

Ces remarques étant évoquées, nous sommes désormais en mesure de calculer le vecteur tangent à la courbe paramétrée par les relations (I.17), et de le projeter dans le plan tangent à $X \times U$ au point $M(0) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, 0)$. Pour y parvenir, il suffit de dériver les relations (I.17) par rapport au paramètre μ, et de prendre ensuite la valeur $\mu = 0$. On pourra retenir une analogie avec la dynamique newtonienne :

groupe	$\leftrightarrow$	trajectoire d'un point M
paramètre μ	$\leftrightarrow$	temps t
vecteur vitesse initial	$\leftrightarrow$	vecteur générateur

Le vecteur générateur est ainsi l'objet de la :

DÉFINITION I.1.3 : ***Le champ de vecteur générateur $\boldsymbol{v}$ du groupe G est donné par :***

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \left.\frac{\partial \overline{x_i}}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \left.\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \phi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{I.19}$$

où, rappelons le, les fonctions $\xi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ et $\phi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ sont appelées respectivement composantes horizontales et verticales du groupe. ■

Les figures I.2 **(a)** et I.2 **(b)** illustrent la projection du vecteur générateur $\boldsymbol{v}$ dans le plan tangent à la variété $X \times U$ pour la valeur $\mu = 0$.

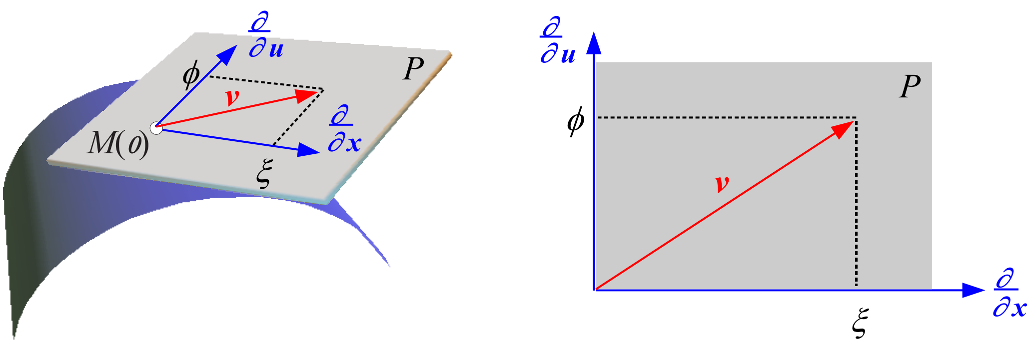

Fig. I.2: **(a)** : Représentation schématique du vecteur générateur d'un groupe et de sa décomposition dans le plan tangent **(b)** : Vue de face dans le plan tangent P.

On comprend désormais un peu mieux la signification géométrique des termes "composantes horizontales" et "verticales". Les composantes du générateur vis à vis des variables indépendantes $\boldsymbol{x}$ peuvent être schématisées sur un axe horizontal (voir la figure I.2 **(b)**) et les composantes vis à vis des variables dépendantes $\boldsymbol{u}$ peuvent être schématisées sur un axe vertical.

EXEMPLE I.1.2 : Soit $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1(x_1) = \sigma(t)$, et le groupe :

$$G = \left\{ \begin{array}{l} \bar{t} = e^{\mu} t \\ \bar{\sigma} = e^{2\mu} \sigma \end{array} \right. \tag{I.20}$$

Alors le générateur de G est donné par :

$$\boldsymbol{v} = \left.\frac{\partial}{\partial \mu}(e^{\mu} t)\right|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial t} + \left.\frac{\partial}{\partial \mu}(e^{2\mu} \sigma)\right|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial \sigma} = t\frac{\partial}{\partial t} + 2\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{I.21}$$

Pour conclure ce paragraphe, il convient de retenir (i) que le générateur d'un groupe contient toute l'information sur ce groupe, de même que le vecteur vitesse initial d'un mobile permet de générer toute sa trajectoire, et que (ii) le générateur joue un rôle primordial dans le calcul des symétries d'une EDP.

I.1.3 Comment passer du générateur au groupe ?

Nous avons vu qu'il est possible de définir un générateur associé à un groupe. De manière réciproque, étant donné un champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ de l'espace tangent à la variété $X \times U$, on peut remonter à l'écriture explicite d'un groupe par l'intégration de ses composantes. Il faut pour celà que certaines conditions d'intégrabilité soient vérifiées pour les composantes $\xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ et $\phi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$. Ainsi, pour le générateur :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{p} \xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{I.22}$$

on peut a priori remonter aux applications $\overline{x_i} = \overline{x_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$ et $\overline{u_i} = \overline{u_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$ via le :

THÉORÈME I.1.1 : ***Les fonctions de transformation du groupe G associé au champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ sont données par la résolution du système différentiel :***

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x_i}}{d\mu} &= \xi_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}) \qquad \overline{x_i}(\mu = 0) = x_i \qquad i = 1..p \\ \frac{d\overline{u_i}}{d\mu} &= \phi_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}) \qquad \overline{u_i}(\mu = 0) = u_i \qquad i = 1..q \end{aligned} \tag{I.23}$$

La résolution de ce système constitue l'exponentielle du champ de vecteur. ■

On peut montrer que si la variété $X \times U$ est différentiable[6] la solution au système différentiel (I.23) existe toujours dans un voisinage du point $M(0)$ de coordonnées $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$. On dit alors que le générateur du groupe engendre un **groupe local à un paramètre**. Si la solution au système (I.23) existe pour toute valeur de μ, alors on dit que le générateur est **complet**, et que le groupe qu'il engendre est **global**. Dans tous les cas, il est intéressant de remarquer que c'est l'axiome d'existence d'un élément neutre qui fournit une condition initiale pour chacune des composantes.

EXEMPLE I.1.3 : En guise d'illustration, soit $x_1 = t$, $u_1 = \sigma(t)$, et le générateur :

$$\boldsymbol{v} = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{I.24}$$

Alors, la résolution du système différentiel :

$$\frac{d\bar{t}}{d\mu} = \bar{t}^2 \qquad \bar{t}(\mu = 0) = t \tag{I.25}$$

$$\frac{d\overline{\sigma}}{d\mu} = \overline{\sigma} \qquad \overline{\sigma}(\mu = 0) = \sigma \tag{I.26}$$

mène au groupe de transformation :

$$\bar{t} = \frac{t}{1 - \mu t} \qquad \overline{\sigma} = e^{\mu} \sigma \tag{I.27}$$

[6]Grosso modo, une variété est différentiable si elle est "lisse". Pour tous les détails techniques, voir encore une fois Talpaert, [Tal-1993].

Cette solution n'est pas définie pour la valeur $\mu = \frac{1}{t}$ donc le générateur $\boldsymbol{v}$ n'est pas complet. Le groupe engendré n'est pas global. Toutefois, il est plus que local puisque la solution existe pour $\mu \in]-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}[$ (voisinage de $\mu = 0$) mais également pour $\mu \in]-\infty, -\frac{1}{t}[$ et $\mu \in]\frac{1}{t}, \infty[$ ■

EXEMPLE I.1.4 : Avec les mêmes variables que l'exemple précédent, soit maintenant le générateur :

$$\boldsymbol{v} = t\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{I.28}$$

Alors, la résolution du système différentiel :

$$\frac{d\bar{t}}{d\mu} = \bar{t} \qquad \bar{t}(\mu = 0) = t \tag{I.29}$$

$$\frac{d\overline{\sigma}}{d\mu} = \overline{\sigma} \qquad \overline{\sigma}(\mu = 0) = \sigma \tag{I.30}$$

conduit au groupe de transformation :

$$\bar{t} = e^{\mu} t \qquad \overline{\sigma} = e^{\mu}\sigma \tag{I.31}$$

Cette solution existe pour toute valeur du paramètre μ donc $\boldsymbol{v}$ est complet et engendre un groupe global à un paramètre. ■

On peut conclure ce paragraphe en évoquant la remarque suivante : si la composante ξ_i associée à la variable x_i (respectivement ϕ_i associé à u_i) est nulle, alors la variable x_i (respectivement u_i) n'est pas transformée par le groupe. En effet, la fonction de transformation $\bar{x}_i$ se calcule en résolvant l'équation :

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\mu} = \xi_i = 0, \quad \text{avec} \quad \bar{x}_i(\mu = 0) = x_i \tag{I.32}$$

dont l'unique solution est $\bar{x}_i = x_i$. La notion de groupe de transformation étant présentée, nous sommes désormais en mesure de définir ce qu'est un groupe de Lie.

I.2 Qu'est-ce-qu'un groupe de Lie ?

I.2.1 Définition

Pour définir ce qu'est un groupe de Lie à un paramètre, introduisons un système d'EDP a priori quelconque sous la forme :

$$\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = \{\Delta_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}), i = 1..q\} = 0 \tag{I.33}$$

où (rappelons le), $\boldsymbol{u}^{(n)}$ est une notation générique pour $\boldsymbol{u}$ et l'ensemble de ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n. Nous dirons que le système (I.33) est **localement solvable en un point $\boldsymbol{x}_0$** s'il existe une solution à ce système au voisinage du point $(\boldsymbol{x}_0)$, en ce sens que $\boldsymbol{u}$ et toutes ses dérivées (soit $\boldsymbol{u}^{(n)}(\boldsymbol{x}_0)$) existent en ce point. On dira également que le système (I.33) est **localement solvable** s'il est localement solvable en tout point $\boldsymbol{x}_0$. Il existe en fait trois définitions possibles pour la notion de groupe de Lie. On peut s'affranchir du détail de ces trois définitions en ne considérant que des systèmes localement solvables[7].

[7] Sur le plan physique, la quasi-totalité des systèmes d'EDP est localement solvable puisque ces systèmes décrivent l'évolution d'une ou plusieurs grandeur(s) observée(s) expérimentalement.

En effet, pour de tels systèmes les trois définitions coïncident. Pour une discussion complète à ce sujet, le lecteur peut consulter l'ouvrage d'Ibragimov, [Ibr-1995], pages 14-19. Rentrons ainsi dans le vif du sujet en énonçant la :

DÉFINITION I.2.1 : ***Un groupe de transformation continu G est un groupe de symétrie pour le système d'EDP $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$ si et seulement s'il transforme une solution à $\boldsymbol{\Delta}$ en une autre solution à $\boldsymbol{\Delta}$.*** ■

La recherche des groupes de symétrie d'un système d'EDP est d'un grand intérêt : ces derniers permettent d'une part de générer des solutions analytiques au système et d'autre part de dégager des invariants. Pour se convaincre de la première affirmation, considérons l'exemple :

EXEMPLE I.2.1 : Soit une fonction de deux variables $u(t, x)$ satisfaisant l'équation de diffusion :

$$u_{,t} + u_{,xx} = 0 \tag{I.34}$$

qui admet comme groupe de symétrie le groupe de paramètre μ_1 défini par (voir Olver, [Olv-1989], pages 117-119) :

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - 4\mu_1 t} \tag{I.35}$$

$$\overline{t} = \frac{t}{1 - 4\mu_1 t} \tag{I.36}$$

$$\overline{u} = u\sqrt{1 - 4\mu_1 t}\exp\left(\frac{-\mu_1 x^2}{1 - 4\mu_1 t}\right) \tag{I.37}$$

et le groupe de paramètre μ_2 :

$$\overline{t} = t + \mu_2 \tag{I.38}$$

Une solution triviale à l'équation (I.34) est donnée par $u = C$, où C est une constante. Le premier groupe de symétrie implique qu'une autre solution est donnée par :

$$u = \frac{C}{\sqrt{1 - 4\mu_1 t}}\exp\left(\frac{-\mu_1 x^2}{1 - 4\mu_1 t}\right) \tag{I.39}$$

Le second groupe, pris pour la valeur particulière $\mu_2 = \frac{4(1-4\mu_1)t+1}{4\mu_1}$, implique la nouvelle solution :

$$u = \frac{C}{\sqrt{4t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \tag{I.40}$$

qui est exactement la solution fondamentale de (I.34). ■

Pour d'autres exemples, on pourra se référer aux panorama relativement exhaustif proposé par Ibragimov ([Ibr-1994], [Ibr-1995], [Ibr-1996]). La puissante technique de résolution exposée ici est en général directement intégrée dans les noyaux de calcul formel. Nous voyons donc qu'il peut être intéressant de calculer tous les groupes de symétries d'un système d'EDP donné. Pour y parvenir, il convient évidemment de formuler une ou plusieurs technique(s) de calcul, ce que nous verrons à la section I.3. Dans l'immédiat, il est nécessaire de présenter la notion de prolongement.

I.2.2 Calcul du prolongement d'un champ de vecteur

La variété $X \times U$ engendrée par les variables $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ peut être étendue si on lui adjoint l'ensemble des dérivées d'ordre inférieur ou égal à un entier donné n. La nouvelle variété $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)})$ ainsi obtenue est appelée **espace des jets d'ordre** n. Par exemple, l'espace des jets d'ordre 2 dénote l'ensemble $\{x_i, u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}\}$. Le prolongement à l'ordre n, noté $pr^{(n)}\boldsymbol{v}$, d'un champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ est l'expression induite par $\boldsymbol{v}$ dans l'espace vectoriel tangent à l'espace des jets d'ordre n (Olver, [Olv-1989], pages 94-96). Plus simplement, si un groupe à un paramètre G transforme les variables $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$, le calcul du prolongement du champ de vecteur générateur $\boldsymbol{v}$ associé à G permet de trouver comment les dérivées des variables $\boldsymbol{u}$ par rapport aux variables $\boldsymbol{x}$ vont se transformer. Avant de donner la formulation explicite de ce prolongement, il convient de préciser quelques notations. On appellera multientier (noté J) de dimension k, la donnée de k entiers inférieurs ou égaux à p :

$$J = (j_1, ..., j_k) \quad 1 \leq j_k \leq p \tag{I.41}$$

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un multientier à 0 élément. Nous noterons $u_{i,J}$ la dérivée partielle de u_i par rapport au multientier J, définie par :

$$u_{i,J} = \frac{\partial^k u_i}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} \tag{I.42}$$

La dérivée totale par rapport au multientier J, notée D_J s'écrit :

$$D_J = D_{j_1} \circ ... \circ D_{j_k} = \frac{d}{dx_{j_1}} \circ ... \circ \frac{d}{dx_{j_k}} \tag{I.43}$$

Par convention, la dérivée d'une fonction par rapport au multientier vide est égale à elle-même soit : $D_\emptyset u = u, \ \forall u \in C^\infty[\Omega]$. Dans la suite, nous emploierons indifféremment la notation D_i ou $\frac{d}{dx_i}$ pour désigner la dérivation totale par rapport à x_i. Nos notations étant précisées, nous sommes en mesure d'énoncer la :

DÉFINITION I.2.2 : ***Le prolongement à l'ordre*** n ***du champ de vecteur v défini en (I.22) est le champ de vecteur noté*** $pr^{(n)}\boldsymbol{v}$ ***et donné par :***

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{J} \phi_k^J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_{k,J}} \tag{I.44}$$

avec :

$$\phi_k^J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = D_J(\phi_k - \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_{k,i}) + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(D_J u^k) \tag{I.45}$$

où J ***représente un multientier quelconque d'ordre inférieur à*** n. ■

La somme écrite en J dans le prolongement suggère que l'on somme sur tous les multientiers qu'il est possible d'effectuer jusqu'à l'ordre n.

EXEMPLE I.2.2 : Si par exemple $n = 2$, et en se limitant à une fonction $u_1(t, x)$ ($q = 1$) des deux variables $x_1 = t$ et $x_2 = x$ ($p = 2$), alors on peut former des multientiers :

- d'ordre 0 : $J = \emptyset$ associé à $D_J = Id$.
- d'ordre 1 : $J = (1)$ associé à $D_J = \dfrac{d}{dx_1} = \dfrac{d}{dt}$, $J = (2)$ associé à $D_J = \dfrac{d}{dx_2} = \dfrac{d}{dx}$.
- d'ordre 2 : $J = (1,1)$ associé à $D_J = \dfrac{d^2}{dt^2}$, $J = (1,2)$ associé à $D_J = \dfrac{d^2}{dtdx}$, $J = (2,1)$ associé à $D_J = \dfrac{d^2}{dxdt}$, $J = (2,2)$ associé à $D_J = \dfrac{d^2}{dx^2}$. ■

L'exponentielle du prolongement d'ordre n d'un champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ fera apparaître des fonctions de transformations pour les variables indépendantes $\boldsymbol{x}$, pour les variables dépendantes $\boldsymbol{u}$, mais également pour les dérivées $\boldsymbol{u}^{(n)}$. Voyons ceci plus en détails sur l'exemple :

EXEMPLE I.2.3 : Soit $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1 = \sigma(t)$, et le générateur :

$$\boldsymbol{v} = at\frac{\partial}{\partial t} + b\sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{I.46}$$

Alors, son prolongement à l'ordre 1 s'écrit, conformément à la formule (I.44) :

$$pr^{(1)}\boldsymbol{v} = at\frac{\partial}{\partial t} + b\sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} + (b-a)\dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \tag{I.47}$$

L'exponentielle de ce prolongement permet d'écrire les fonctions de transformations :

$$\begin{cases} \bar{t} = e^{a\mu}t = k_t t \\ \bar{\sigma} = e^{b\mu}\sigma = k_\sigma \sigma \\ \bar{\dot{\sigma}} = e^{(b-a)\mu}\dot{\sigma} = \dfrac{k_\sigma}{k_t}\dot{\sigma} \end{cases} \tag{I.48}$$

Il est en effet cohérent d'observer que si la variable t est multipliée par une constante k_t, et que la variable σ est multipliée par une constante k_σ, alors la dérivée $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ est multipliée par la constante $\frac{k_\sigma}{k_t}$. ■

Retenons ainsi que le prolongement à l'ordre n d'un champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ traduit les répercussions des fonctions de transformations $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$ et $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu)$ associées à $\boldsymbol{v}$ sur les dérivées de $\boldsymbol{u}^{(n)}$.

REMARQUE I.2.1 : Le chercheur distrait qui a oublié son exemplaire du Olver à la maison pourra retrouver la formule du prolongement grâce au moyen mnémotechnique suivant. Considérons par exemple le cas d'une seule variable dépendante t et d'une seule variable dépendante f. Considérons également deux fonctions de transformations sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \bar{t}(t, f, \mu) \\ \bar{f} &= \bar{f}(t, f, \mu) \end{aligned} \tag{I.49}$$

et cherchons la valeur de la transformée de la dérivée de f par rapport à t sous la forme :

$$\bar{f}' = f' + \delta f' = f' + \mu(\text{quelque chose}) \tag{I.50}$$

car le terme "quelque chose" sera, par identification, la composante du générateur relative à f' (voir la définition (I.1.2)). Nous avons :

$$\bar{f}' = \frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} \approx \frac{\delta\bar{f}}{\delta\bar{t}} = \frac{\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\bar{f}}{\partial f}\delta f}{\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\bar{t}}{\partial f}\delta f} \tag{I.51}$$

car on différentie autour de la valeur $\mu = 0$ ce qui implique $\delta\mu = 0$. En divisant numérateur et dénominateur par δt, il vient :

$$\bar{f}' \approx \frac{\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\bar{f}}{\partial f}\delta f}{\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\bar{t}}{\partial f}\delta f} = \frac{\frac{\partial\bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{f}}{\partial f}f'}{\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{t}}{\partial f}f'} \tag{I.52}$$

Appelons maintenant $\xi(t, f)$ et $\phi(t, f)$ les composantes respectives de t et f et injectons les expressions $\bar{t} = t + \mu\xi$ et $\bar{f} = f + \mu\phi$ dans l'équation (I.52)[8] :

$$\bar{f}' \approx \frac{f' + \mu\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\phi}{\partial f}f'}{1 + \mu\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\xi}{\partial f}f'} = \frac{f' + \mu D_t\phi}{1 + \mu D_t\xi} \tag{I.53}$$

Par un développement de Taylor à l'ordre 1 en μ, on aboutit enfin à :

$$\bar{f}' \approx (f' + \mu D_t\phi)(1 - \mu D_t\xi) \approx f' + \mu(D_t\phi - f' D_t\xi) + o(\mu^2) \tag{I.54}$$

[8] Il convient de prendre garde au fait que t et f sont supposées indépendantes pour faire ce calcul. Par suite, on aura $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ alors que $\frac{df}{dt} = \dot{f}$.

Nous laissons soin au lecteur de vérifier que la composante en f' ainsi trouvée, soit $\phi' = D_t\phi - f'D_t\xi$, coïncide bien avec celle que l'on peut calculer avec la formule du prolongement (équation (I.44)). La méthode se généralise facilement, mais est relativement lourde. ■

I.2.3 Invariants d'un groupe

Dans cette section, on présente la notion d'invariant associé à un groupe. Pour un groupe G de transformation à un paramètre :

$$G\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) \\ \bar{u} = \bar{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) \end{cases} \tag{I.55}$$

un invariant est une grandeur conservée le long des trajectoires engendrées par G (relations (I.55)). Formulons mathématiquement ceci en énonçant la :

DÉFINITION I.2.3 : ***Une fonction $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ est un invariant pour un groupe de transformation G si elle reste constante pour toute valeur transformée de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$:***

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{I.56}$$

On peut illustrer immédiatement ce théorème avec l'exemple :

EXEMPLE I.2.4 : Soit le groupe :

$$\begin{cases} \bar{t} = e^{2\mu}t \\ \bar{x} = e^{\mu}x \end{cases} \tag{I.57}$$

Alors la quantité $\frac{x^2}{t}$ est un invariant car :

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{t}} = \frac{e^{2\mu}x}{e^{2\mu}t} = \frac{x^2}{t} \tag{I.58}$$

pour toute valeur du paramètre μ. ■

Sur le plan physique, il peut être intéressant de vouloir calculer tous les invariants d'un groupe de transformation G donné. Pour y parvenir, il faut chercher quelles sont les trajectoires correspondant à l'équation $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = cste$, où $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ est la(les) fonction(s) invariante(s) à trouver. Si on suppose que ces trajectoires sont engendrées par un vecteur infinitésimal $(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{u})$, il faut exiger que $(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{u})$ reste colinéaire au générateur $\boldsymbol{v}$ quand le paramètre μ varie. Cette démarche est strictement analogue à la recherche des lignes de courant de l'écoulement d'un fluide quand le champ de vitesse est connu. On pourra raisonner de deux manières :

– La première met en œuvre le produit scalaire. On cherche ainsi la fonction F telle que ∇F soit orthogonal à $\boldsymbol{v}$, d'où une équation en F (voir la figure I.3) :

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla F = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\phi}) \cdot \nabla F = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \phi_i \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \tag{I.59}$$

qu'on pourra réécrire sous la forme :

$$\boldsymbol{v}(F) = 0 \tag{I.60}$$

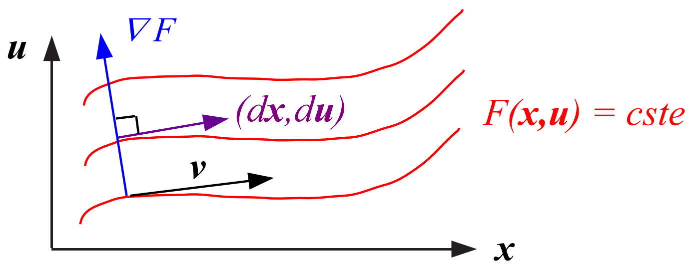

Fig. I.3: Représentation schématique de la recherche des invariants associés à un groupe donné.

– La deuxième méthode consiste à écrire la relation de colinéarité (voir la figure I.3) :

$$(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\phi}) \tag{I.61}$$

ce qui conduit, après élimination de λ, au système en $d\boldsymbol{x}$ et $d\boldsymbol{u}$:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_p}{\xi_p} = \frac{du_1}{\phi_1} = \cdots = \frac{du_q}{\phi_q} \tag{I.62}$$

On peut montrer que le nombre d'invariants indépendants d'un groupe donné est $p+q-1$. Celà signifie que si on trouve ces $p+q-1$ invariants, tout autre invariant sera forcément une fonction des $p+q-1$ premiers. Nous sommes désormais en mesure de considérer deux applications de ces méthodes sur des exemples.

EXEMPLE I.2.5 : Soit $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1(x_1) = \sigma(t)$, et le groupe :

$$G = \begin{cases} \bar{t} = e^{2\mu} t \\ \bar{\sigma} = e^{\mu}\sigma \end{cases} \tag{I.63}$$

Alors le générateur de G est donné par :

$$\boldsymbol{v} = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{I.64}$$

Cherchons, conformément à la première méthode de calcul des invariants, une fonction F qui satisfait l'équation (I.59), qui prend ici la forme :

$$2t\frac{\partial F}{\partial t} + \sigma\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \tag{I.65}$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$F = g\left(\frac{\sigma^2}{t}\right) \tag{I.66}$$

Comme le groupe ne peut posséder qu'un invariant ($p+q-1=1$), l'unique invariant du groupe est $\frac{\sigma^2}{t}$■

EXEMPLE I.2.6 : Reprenons l'exemple précédent mais en adoptant cette fois la deuxième méthode de calcul des invariants. Ecrivons donc que deux incréments dt et $d\sigma$ sont liés le long d'une ligne de courant $F(t,\sigma) = cste$ par le système d'équations (III.27) :

$$\frac{dt}{2t} = \frac{d\sigma}{\sigma} \tag{I.67}$$

On obtient très rapidement :

$$\frac{1}{2}d(\ln t) = d(\ln \sigma) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln t = \ln\sigma + K \quad \Rightarrow \quad \sqrt{t} = K\sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma^2}{t} = K \tag{I.68}$$

où K est une constante arbitraire. ■

L'intérêt pratique des invariants est que leur mise en oeuvre permet parfois de résoudre explicitement une équation différentielle. En effet, nous disposons du :

THÉORÈME I.2.1 : ***Si le système $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$ de s EDP admet le groupe G comme groupe de symétrie, et si le générateur v de G ne s'annule pas sur la variété $X \times U$ alors il existe des fonctions Φ_k, $k = 1..s$, telles que le système $\boldsymbol{\Delta} = 0$ puisse être réécrit sous la forme équivalente :***

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\Phi_k(J_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \cdots, J_{p+q-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) = 0\} \quad , \quad k = 1..s \tag{I.69}$$

où les $J_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ sont une base de l'ensemble des invariants du groupe G. ■

On sous-entend par "base de l'ensemble des invariants" l'ensemble minimal des invariants à connaître pour pouvoir exprimer tous les autres invariants. Appliquons immédiatement ce théorème dans le cas de la diffusion unidirectionnelle.

EXEMPLE I.2.7 : Soit $p = 2$, $q = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = x$, $u_1 = u(t, x)$, et l'équation :

$$u_{,t} - u_{,xx} = 0 \tag{I.70}$$

Il est facile de vérifier que le groupe :

$$G = \begin{cases} \bar{t} = e^{2\mu} t \\ \bar{x} = e^{\mu} x \\ \bar{u} = u \end{cases} \tag{I.71}$$

est un groupe de symétrie pour l'équation (I.70). En s'inspirant de l'exemple I.2.6, on peut voir qu'une base des invariants de G est donnée par $J_1 = \frac{x^2}{t}$, et $J_2 = u$ (il n'y en a que 2 car $p + q - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$). Posons $h(J_1) = u(t, u)$, il vient, en remplaçant dans l'équation (I.70) et après simplifications :

$$h'' + \frac{2 + J_1}{4J_1} h' = 0 \tag{I.72}$$

soit après intégration :

$$h(J_1) = \int_0^{J_1} \frac{K e^{-\frac{z}{4}}}{\sqrt{z}} dz = u = J_2 \tag{I.73}$$

que l'on peut réécrire sous la forme (K est une constante arbitraire) :

$$\Phi(J_1, J_2) = J_2 - \int_0^{J_1} \frac{K e^{-\frac{z}{4}}}{\sqrt{z}} dz = 0 \tag{I.74}$$

Notons que l'on a résolu l'équation de la chaleur car on peut réécrire la relation (I.73) sous la forme :

$$u(t, x) = \int_0^{\frac{x^2}{t}} \frac{K e^{-\frac{z}{4}}}{\sqrt{z}} dz \tag{I.75}$$

Retenons de ce dernier exemple que : lorsque $\boldsymbol{u}$ fait partie des invariants pour un groupe de symétrie d'un système $\boldsymbol{\Delta} = 0$, la recherche d'une relation de type (I.69) peut conduire à une solution pour $\boldsymbol{\Delta}$.

I.3 Calcul des symétries

I.3.1 Présentation de l'algorithme

La première méthode de calcul des groupes de symétrie est basée sur le prolongement d'un champ de vecteur. Avant de rentrer dans les détails de l'algorithme, nous aurons besoin de la :

DÉFINITION I.3.1 : ***Le système d'EDP*** $\{\Delta_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}), i = 1..q\} = 0$ ***est de rang maximal si et seulement si la matrice :***

$$J = \left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k}, \frac{\partial \Delta_i}{\partial u_{j,J}}\right) \quad i = 1..q, \;\; k = 1..p, \;\; j = 1..q \tag{I.76}$$

est de rang q ***partout où*** $\{\Delta_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}), i = 1..q\} = 0$***,*** J ***étant un multientier quelconque d'ordre inférieur ou égal à*** n***.*** ■

En pratique, le calcul du rang se fait de manière classique : il correspond à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires des vecteurs colonnes de J. Voyons ceci avec l'exemple :

EXEMPLE I.3.1 : Soit $u_1 = u(x, y)$ vérifiant l'équation harmonique :

$$\Delta = u_{,xx} + u_{,yy} = 0 \tag{I.77}$$

Alors, la matrice définie en (I.76) s'écrit :

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial u}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_x}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_y}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_{xx}}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_{xy}}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_{yx}}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_{yy}}\right) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{I.78}$$

La dimension de l'espace engendré par combinaison linéaire des éléments de J, soit 0 et 1, est constante et reste égale à 1. Ainsi l'équation (I.77) est de rang maximal. ■

Les résultats que nous allons présenter dans la suite nécessitent de restreindre la forme du système d'EDP considéré.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous nous limitons à des systèmes d'EDP $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)})$ **de rang maximal et localement solvables.**

La méthode de calcul présentée ici s'appuie sur le[9] :

THÉORÈME I.3.1 : ***Le groupe de transformation continu*** G***, associé au générateur*** $\boldsymbol{v}$ ***est un groupe de symétrie pour le système d'EDP*** $\boldsymbol{\Delta} = 0$ ***si et seulement si*** $pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = 0$ ***partout où*** $\boldsymbol{\Delta} = 0$***.*** ■

La recherche des groupes de symétries du système $\boldsymbol{\Delta} = 0$ consiste à rechercher tous les générateurs qui vérifient le théorème (I.3.1). On pourra retenir le théorème (I.3.1) grâce au moyen mnémotechnique suivant : la recherche des groupes de symétries d'un système d'équations consiste en quelque sorte à appliquer la démarche inverse de celle adoptée lors de la recherche des invariants d'un groupe. En effet, la recherche des invariants pour un groupe donné G consiste à trouver toutes les grandeurs F telle que l'équation (III.25) soit vérifiée, soit :

$$\boldsymbol{v}(F) = 0 \tag{I.79}$$

[9] la preuve complète de ce théorème est donnée dans [Olv-1989], page 104.

dans laquelle le champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ est le générateur de G. Le calcul des symétries consiste quant à lui à calculer pour une quantité F "que l'on veut conserver", notée ici $\boldsymbol{\Delta}$, l'ensemble des générateurs $\boldsymbol{v}$ qui satisfont à l'équation (I.79). Comme $\boldsymbol{\Delta}$ dépend éventuellement des dérivées $\boldsymbol{u}^{(n)}$, il convient de remplacer $\boldsymbol{v}$ par $pr^{(n)}\boldsymbol{v}$ dans l'équation (I.79). On obtient ainsi la condition de symétrie $pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = 0$. Avant de décrire l'algorithme de calcul des groupes, illustrons le théorème (I.3.1) en l'appliquant à une équation simple considérée dans l'exemple :

EXEMPLE I.3.2 : Soit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante sur une fonction $\sigma(t)$:

$$\Delta(t, \sigma, \dot{\sigma}) = \dot{\sigma} + \sigma = 0 \tag{I.80}$$

Alors, le générateur $\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial t}$ à pour prolongement :

$$pr^{(1)}\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{I.81}$$

qui vérifie :

$$pr^{(1)}\boldsymbol{v}\Delta(t, \sigma, \dot{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\sigma} + \sigma) = 0 \tag{I.82}$$

Le groupe associé à ce générateur est le groupe des translations pour la variable t : $\bar{t} = t + \mu$. Il est équivalent d'affirmer que si $\sigma(t)$ est solution de $\Delta(t, \sigma, \dot{\sigma}) = 0$, alors il en est de même pour $\sigma(t - \mu)$, et ce pour toute valeur de μ. ■

La recherche des groupes de symétrie d'un système d'EDP d'ordre n, noté $\boldsymbol{\Delta} = 0$, localement solvable et de rang maximal se fait par l'algorithme suivant :

❶ il faut d'abord calculer $pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta}$ pour un générateur :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{4} \xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\frac{\partial}{\partial u_k} \tag{I.83}$$

a priori inconnu.

❷ il faut ensuite exprimer les dérivées d'ordre le plus haut (ici n) en fonction des dérivées d'ordre inférieur en tenant compte du système $\boldsymbol{\Delta} = 0$.

❸ une fois ces dérivées injectées dans la condition $pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = 0$, on obtient un système d'EDP linéaire vis à vis des composantes ξ_k et ϕ_k.

❹ pour résoudre ce système, il faut annuler tous les coefficients des dérivées de $\boldsymbol{u}$ par rapport à $\boldsymbol{x}$. Le système obtenu s'appele **système caractéristique**

❺ il faut finalement résoudre le système caractéristique.

Nous allons appliquer cet algorithme de recherche sur l'exemple :

EXEMPLE I.3.3 : Soit $u_1 = \sigma(t)$, et l'équation différentielle :

$$\Delta(t, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) = \ddot{\sigma} + \dot{\sigma} + a\sigma = 0 \tag{I.84}$$

où a est une constante. Cette équation est de rang maximal car la matrice :

$$J = (\frac{\partial \Delta}{\partial t}, \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}, \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{\sigma}}, \frac{\partial \Delta}{\partial \ddot{\sigma}}) = (0, a, 1, 1) \tag{I.85}$$

engendre (par combinaison linéaire de ses vecteurs colonnes) un espace vectoriel de dimension 1. Elle est également localement solvable. Soit le générateur a priori quelconque :

$$\boldsymbol{v} = \xi(t,\sigma)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(t,\sigma)\frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{I.86}$$

dont le prolongement à l'ordre 2 est donné par :

$$pr^{(2)}\boldsymbol{v} = \xi(t,\sigma)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(t,\sigma)\frac{\partial}{\partial \sigma} + \Big(\frac{d\phi(t,\sigma)}{dt} - \frac{d\xi(t,\sigma)}{dt}\dot{\sigma}\Big)\frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} + \Big(\frac{d^2\phi(t,\sigma)}{dt^2} - \frac{d^2\xi(t,\sigma)}{dt^2}\dot{\sigma}\Big)\frac{\partial}{\partial \ddot{\sigma}} \tag{I.87}$$

La condition $pr^{(2)}\boldsymbol{v}\Delta = 0$ (étape ❶), dans laquelle on injecte la liaison différentielle $\ddot{\sigma} = -\dot{\sigma} - a\sigma$ (étape ❷) mène à l'équation caractéristique linéaire vis à vis de $\xi(t,\sigma)$ et $\phi(t,\sigma)$ (sans simplifications pour l'instant, (étape ❸)) :

$$\begin{aligned} \xi + a\phi + \phi_t + \phi_\sigma\dot{\sigma} - \xi_t\dot{\sigma} - \xi_\sigma\dot{\sigma}^2 + \phi_{tt} + \phi_{t\sigma}\dot{\sigma} - \phi_\sigma\dot{\sigma} - a\sigma\phi_\sigma + \phi_{\sigma t}\dot{\sigma} + \phi_{\sigma\sigma}\dot{\sigma}^2 \\ -\xi_{tt}\dot{\sigma} - \xi_{t\sigma}\dot{\sigma}^2 + \xi_\sigma\dot{\sigma}^2 + a\sigma\xi_\sigma\dot{\sigma} - \xi_{\sigma t}\dot{\sigma}^2 - \xi_{\sigma\sigma}\dot{\sigma}^3 + 2\xi_t\dot{\sigma} + 2\xi_t a\sigma + 2\xi_\sigma\dot{\sigma}^2 + 2\xi_\sigma a\sigma\dot{\sigma} = 0 \end{aligned} \tag{I.88}$$

Nous voyons que, comme les composantes ξ et ϕ ne dépendent pas explicitement de la dérivée $\dot{\sigma}$, on peut voir la relation (I.88) comme l'annulation d'un polynôme d'ordre 3 en $\dot{\sigma}$, soit :

$$A(\cdots)\dot{\sigma}^3 + B(\cdots)\dot{\sigma}^2 + C(\cdots)\dot{\sigma} + D(\cdots) = 0$$

où les coefficients A, B, C, et D ne dépendent pas de $\dot{\sigma}$. Par suite, on obtient (après simplifications) quatre équations caractéristiques correspondant à $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, et $D = 0$ (étape ❹) :

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \xi_{\sigma\sigma} = 0 \\ B & \rightarrow & \phi_{\sigma\sigma} - 2\xi_{t\sigma} + 2\xi_\sigma = 0 \\ C & \rightarrow & \xi_t + 2\phi_{t\sigma} - \xi_{tt} + 3a\sigma\xi_\sigma = 0 \\ D & \rightarrow & \xi + a\phi + \phi_t + \phi_{tt} - a\sigma\phi_\sigma + 2\xi_t a\sigma = 0 \end{array}$$

La résolution de ce système linéaire (étape ❺) en ξ et ϕ donne la forme générale des générateurs de groupes de symétrie pour l'équation (I.84). ■

Nous pouvons voir sur cet exemple que le calcul des symétries est long et fastidieux. Pour faciliter cet exercice et limiter les erreurs de calculs, il est possible de faire appel à des logiciels de calcul formel. Citons quelques un de ces logiciels : Reduce, Maple, Maxima, Mathematica, Mumath, Axiom... Le lecteur trouvera un descriptif assez complet des programmes disponibles dans l'ouvrage de Ibragimov, [Ibr-1996], pages 365-479.

I.3.2 Autres algorithmes de calcul des symétries

Si on croît Ibragimov, la méthode de calcul des groupes de symétries que nous venons d'exposer ici n'est pas unique ([Ibr-1996], page 372) :

> *There are three major methods to compute Lie symmetries. The first one uses prolonged vector fields, the second utilizes differential forms (wedge products) due to Cartan [...]. The third one uses the notion of "formal symmetry" [...]. Although restricted to evolution systems with two independant variables, the latter method provides a very quick way to compute canonical Lie-Backlünd symmetries. Due to its limited scope we will not elaborate on that technique.*

La méthode basée sur le calcul différentiel extérieur de Cartan a été développé par Harrison et Estabrook. Grosso modo, elle s'appuie sur une réécriture du système d'équations $\boldsymbol{\Delta}$ sous forme de système différentiel extérieur. La condition de symétrie est remplacée par une condition d'invariance écrite à l'aide de la dérivée de Lie. Pour plus d'informations, on trouvera une liste de références dans [Ibr-1996], page 375 et 376. La méthode basée sur les séries formelles fait appel à beaucoup de résultats théoriques, que nous ne pouvons pas développer ici. On trouvera tous les développements dans [Ibr-1996], pages 3-27. Ainsi, dans cette synthèse sur les groupes de Lie, on se limitera à la première technique de calcul qui aura pour mérite de laisser le rapport :

$$\frac{\text{énergie dépensée pour comprendre les outils mathématiques}}{\text{énergie investie pour rentabiliser les outils mathématiques en physique}}$$

pas “trop grand”.

I.3.3 Symétries et conditions initiales

Terminons la présentation de nos outils avec une brève remarque sur les conditions initiales. Considèrons encore un système d'EDP $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$ mais cette fois complété par un vecteur de conditions initiales sur les $(n-1)^{\text{ièmes}}$ dérivées des u_j en un point $\boldsymbol{x}^0$:

$$\boldsymbol{u}^{(n-1)}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{u}^0 \quad \Leftrightarrow \quad u_j^{(n-1)}(\boldsymbol{x}^0) = u_j^0 \quad j = 1..q \tag{I.89}$$

L'idée développée ici est que nous pourrons intégrer simplement ces conditions initiales dans l'étude des symétries de $\boldsymbol{\Delta}$ en les considérant comme la solution du système differentiel un peu particulier :

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = 0 \tag{I.90}$$

$$\boldsymbol{u}^{(n-1)}(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{u}^0 = 0 \tag{I.91}$$

Par suite, l'étude des symétries d'un problème complet[10] se fera comme suit : il suffit de calculer comme précédemment les groupes de symétries de $\boldsymbol{\Delta}$ puis d'imposer aux générateurs $\boldsymbol{v}$ ainsi trouvés les deux conditions de symétrie supplémentaires :

$$pr^{(n)}(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \text{ en } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \tag{I.92}$$

$$pr^{(n)}(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}^{(n-1)}(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{u}^0) = 0 \text{ en } \boldsymbol{u}^{(n-1)}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{u}^0 \tag{I.93}$$

[10]Nous entendons par problème complet la traduction mathématique d'une situation physique bien déterminée, c'est à dire la résolution d'un système d'EDP complété par des conditions limites et/ou initiales.

Chapitre II

Symétries généralisées

Sommaire

[1]Traduction naïve et simplifiée de "*evolutionary representative vector field*", Olver, [Olv-1989].

II.1 Définitions

II.1.1 Transformations de contact

Jusqu'à présent, nous avons travaillé sur des transformations de la forme :

$$\begin{array}{ll} \overline{x_j} = \overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) & j = 1..p \\ \overline{u_j} = \overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu) & j = 1..q \end{array} \tag{II.1}$$

qu'on peut qualifier de **transformations géométriques** ou **transformations ponctuelles**. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à des transformations plus générales, en ce sens que nous allons ajouter les dérivées de $\boldsymbol{u}$ comme argument des fonctions de transformations :

$$\begin{array}{ll} \overline{x_j} = \overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n)}, \mu) & j = 1..p \\ \overline{u_j} = \overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n)}, \mu) & j = 1..q \end{array} \tag{II.2}$$

On parlera alors de **transformation de contact**. La notion de groupe de symétrie que nous avons vue au chapitre I se généralise aux cas des transformations de contact. On appelle ces symétries **symétries généralisées** ou **symétries de Lie-Backlünd**. Dans ce chapitre, nous allons présenter les principaux résultats relatifs à ces symétries généralisées.

II.1.2 Champ de vecteur généralisé et vecteur d'évolution[2]

Par analogie avec les symétries classiques, on peut définir un champ de vecteur générateur associé à une transformation de contact, appelé **champ de vecteur généralisé** :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \left.\frac{\partial \overline{x_i}}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \left.\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \phi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{II.3}$$

Ce générateur contient toute l'information sur le groupe, et on peut encore appeler les fonctions $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\phi}$ composantes horizontales et verticales. Notons que nous pouvons lui associer un autre champ de vecteur qui jouera un rôle important dans le calcul des symétries généralisées. Enonçons donc la :

DÉFINITION II.1.1 : ***Le champ de vecteur d'évolution $\boldsymbol{v}_Q$ associé au champ de vecteur (II.3) est donné par :***

$$\boldsymbol{v}_Q = \sum_{i=1}^{q} Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{II.4}$$

où les fonctions $Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)})$, appelées caractéristiques du groupe, sont données par :

$$Q_i = \phi_i - \sum_{j=1}^{p} \xi_j u_{i,j} \quad i = 1..q \tag{II.5}$$

[2]Traduction naïve et simplifiée de "*evolutionary representative vector field*", Olver, [Olv-1989].

Le vecteur d'évolution $\boldsymbol{v}_Q$, bien que purement vertical, conserve toute l'information qui est contenue dans le vecteur générateur $\boldsymbol{v}$. En effet, l'information sur les composantes horizontales $\boldsymbol{\xi}$ est intégrée dans l'expression des fonctions caractéristiques $\boldsymbol{Q}$ (equations (II.4) et (II.5)).

EXEMPLE II.1.1 : Soit $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1 = f$, et le champ de vecteur généralisé suivant :

$$\boldsymbol{v} = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (f^2 + \dot{f}) \frac{\partial}{\partial f} \tag{II.6}$$

Le vecteur d'évolution qui lui est associé est donné par les relations (II.4) et (II.5) :

$$\boldsymbol{v}_Q = (f^2 + \dot{f} - t^2 \dot{f}) \frac{\partial}{\partial f} \tag{II.7}$$

Voyons à présent comment calculer le prolongement d'un champ de vecteur généralisé et celui de son vecteur caractéristique.

II.1.3 Prolongement d'un champ de vecteur généralisé

La formule du prolongement d'un champ de vecteur généralisé reste la même que celle évoquée au chapitre I, soit :

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{J} \left[D_J(\phi_k - \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_{k,i}) + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(D_J u^k) \right] \frac{\partial}{\partial u_{k,J}} \tag{II.8}$$

Il est de plus intéressant de calculer le prolongement du champ de vecteur $\boldsymbol{v}_Q$. Pour ce faire, on peut (i) remarquer que les composantes horizontales de $\boldsymbol{v}_Q$ sont nulles et que ses composantes verticales sont données par $\phi_i = Q_i$ (voir les formules (II.4) et (II.5)), et (ii) reprendre ainsi la relation (II.8) pour les valeurs $\boldsymbol{\xi} \equiv 0$ et $\boldsymbol{\phi} \equiv \boldsymbol{Q}$. Après quelques manipulations, on aboutit au :

THÉORÈME II.1.1 : ***Le prolongement du vecteur v_Q est donné par l'expression :***

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{J} D_J Q_i \frac{\partial}{\partial u_{i,J}} \tag{II.9}$$

où la somme en J suggère que l'on somme sur tous les multientiers d'ordre inférieur ou égal à n. ■

Il est important de ne pas oublier dans la somme en J le multientier à zéro élement, soit $J = \emptyset$ dont la dérivée correspond à l'application identique : $D_\emptyset = Id$. Voyons immédiatement comment appliquer cette dernière formule.

EXEMPLE II.1.2 : Soit $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1 = f$, et le champ de vecteur généralisé suivant :

$$\boldsymbol{v} = (1 + t^2) \frac{\partial}{\partial t} + (f^2 + \dot{f}^2 + 1) \frac{\partial}{\partial f} \tag{II.10}$$

Son prolongement à l'ordre 1 est donné par l'application de la relation II.8 :

$$pr^{(1)}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \left[\frac{d}{dt}(f^2 + \dot{f}^2 + 1 - (1 + t^2)\dot{f}) + (1 + t^2)\ddot{f} \right] \frac{\partial}{\partial \dot{f}} = \boldsymbol{v} + 2(f\dot{f} + \dot{f}\ddot{f} - t\dot{f}) \frac{\partial}{\partial \dot{f}} \tag{II.11}$$

EXEMPLE II.1.3 : On reprend les hypothèses de l'exemple précédent. Le vecteur caractéristique du vecteur (II.10) est donné par l'application des formules (II.4) et (II.5), soit :

$$\boldsymbol{v}_Q = \left[(f^2 + \dot{f}^2 + 1) - (1 + t^2)\dot{f}\right] \frac{\partial}{\partial f} \tag{II.12}$$

Le prolongement à l'ordre 1 de $\boldsymbol{v}_Q$ est quant à lui donné par l'application de la relation (II.9) :

$$pr^{(1)}\boldsymbol{v}_Q = D_\emptyset \left[(f^2 + \dot{f}^2 + 1) - (1 + t^2)\dot{f}\right] \frac{\partial}{\partial f} + D_t \left[(f^2 + \dot{f}^2 + 1) - (1 + t^2)\dot{f}\right] \frac{\partial}{\partial \dot{f}} \tag{II.13}$$

ce qui conduit, après simplifications, à :

$$pr^{(1)}\boldsymbol{v}_Q = \left[(f^2 + \dot{f}^2 + 1) - (1 + t^2)\dot{f}\right] \frac{\partial}{\partial f} + \left[2f\dot{f} + 2\dot{f}\ddot{f} - 2t\dot{f} - (1 + t^2)\ddot{f}\right] \frac{\partial}{\partial \dot{f}} \tag{II.14}$$

Pour finir ce paragraphe, voyons que pour un champ généralisé $\boldsymbol{v}$ de champ d'évolution $\boldsymbol{v}_Q$, les prolongements $pr^{(n)}\boldsymbol{v}$ et $pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q$ sont liés, comme le montre le :

THÉORÈME II.1.2 : ***Les prolongements $pr^{(n)}\boldsymbol{v}$ et $pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q$ d'un champ de vecteur généralisé v (donné par (II.3)) et du champ d'évolution v_Q qui lui est associé sont liés par la relation :***

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v} = pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} \xi_i D_i \tag{II.15}$$

EXEMPLE II.1.4 : En reprenant les résultats des exemples (II.1.2) et (II.1.3), calculons la quantité :

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v} - pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q = (1 + t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (1 + t^2)\dot{f}\frac{\partial}{\partial f} + (1 + t^2)\ddot{f}\frac{\partial}{\partial \dot{f}} = (1 + t^2)D_t \tag{II.16}$$

et rappelons que $(1 + t^2)$ est bien la composante horizontale du générateur (II.10). ■

Nous venons de présenter les principaux outils nécessaires au calcul des symétries généralisées. Il convient à présent d'entrer dans le vif du sujet.

II.2 Calcul des symétries de Lie-Backlünd

On considère dans toute cette section, un système d'EDP $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$. Nous avons vu au chapitre I que le calcul des groupes de symétries dites "géométriques" se fait sur des systèmes d'EDP de rang maximal et localement solvables. Pour les symétries généralisées, il convient de généraliser un peu ces notions. Nous aurons ainsi besoin d'introduire le prolongement d'un système d'EDP, via la :

DÉFINITION II.2.1 : ***Le prolongement à l'ordre k d'un système de s EDP d'ordre n noté $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$ est le système d'EDP d'ordre $n + k$ qui est la réunion de toutes les équations obtenues en dérivant $\boldsymbol{\Delta}$ par rapport à tous les multientiers J qu'il est possible de créer jusqu'à l'ordre k :***

$$pr^{(k)}\boldsymbol{\Delta} = \{D_J \Delta_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}), i = 1..s\} \tag{II.17}$$

On peut appliquer immédiatement ce théorème sur l'exemple :

EXEMPLE II.2.1 : Soit $p = 2$, $x_1 = t$, $x_2 = x$, $q = 1$, $u_1 = u(t,x)$, et l'équation :

$$\Delta = u_t + u_{xx} = 0 \tag{II.18}$$

Alors le prolongement à l'ordre 2 de Δ est donnée par la réunion de toutes les équations :

$$pr^{(2)}\Delta = \begin{cases} D_\emptyset\Delta & = & u_t + u_{xx} \\ D_t\Delta & = & u_{tt} + u_{xxt} \\ D_x\Delta & = & u_{tx} + u_{xxx} \\ D_{tt}\Delta & = & u_{ttt} + u_{xxtt} \\ D_{tx}\Delta & = & u_{ttx} + u_{xxtx} \\ D_{xx}\Delta & = & u_{txx} + u_{xxxx} \end{cases} \tag{II.19}$$

Comme dans le chapitre I, il est nécessaire de s'intéresser à des systèmes d'EDP un peu particuliers.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous nous limitons à des systèmes d'EDP $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)})$ dont tous les prolongements sont de rang maximal et localement solvables.

Pour vérifier si le rang du prolongement de $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)})$ à un ordre quelconque est bien maximal, on devra se reporter à la définition (I.3.1). De même, rappelons que la notion de solvabilité locale a été évoquée à la section I.2.1.

II.2.1 Théorèmes de caractérisation

Le théorème (I.3.1) qui permet de calculer les symétries géométriques d'un système d'EDP localement solvable peut se transcrire au cas des symétries généralisées. Par suite l'algorithme de recherche de ces symétries généralisées se fera de manière analogue au cas classique. Nous pouvons ainsi énoncer le :

THÉORÈME II.2.1 : ***Le champ de vecteur généralisé v donné par (II.3) génère un groupe de symétrie pour le système d'équation $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$ si et seulement si $pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = 0$ partout où $\boldsymbol{\Delta} = 0$.*** ∎

On pourra également exploiter les résultats sur les champs caractéristiques. En effet, d'après le théorème (II.1.2), on peut écrire :

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q\boldsymbol{\Delta} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i D_i \boldsymbol{\Delta} \tag{II.20}$$

ce qui conduit très aisément au :

THÉORÈME II.2.2 : ***Le champ de vecteur généralisé v donné par (II.3) génère un groupe de symétrie pour le système d'équations $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{(n)}) = 0$ si et seulement si il en est de même pour son champ caractéristique v_Q.*** ∎

En effet, la condition $pr^{(n)}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = 0$ avec la condition $\boldsymbol{\Delta} = 0$ conduit, via l'équation (II.20), à $pr^{(n)}\boldsymbol{v}_Q\boldsymbol{\Delta} = 0$. Nous allons à présent mettre à profit ces deux derniers théorèmes en élaborant deux algorithmes de calcul de symétries généralisées.

II.2.2 Premier algorithme de calcul

Le premier algorithme de calcul des symétries généralisées consiste à utiliser le théorème (II.2.1), et se rapproche donc de l'algorithme de calcul des symétries géométriques. La seule difficulté supplémentaire est qu'on ne peut pas annuler les coefficients des dérivées de $\boldsymbol{u}$ puisque les composantes $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\phi}$ dépendent justement de ces dérivées. Retenons ainsi la marche à suivre :

❶ il suffit de calculer $pr^{(n_{max})}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta}$ pour un générateur :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{p} \xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n_{max})}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n_{max})}) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{II.21}$$

a priori inconnu. Notons que l'on doit se fixer un ordre de dérivation n_{max} maximal pour les arguments de ξ et ϕ. On parle de **symétrie de Lie-Backlünd d'ordre** n_{max}.

❷ il faut ensuite exprimer les dérivées d'ordre le plus haut (ici n_{max}) en fonction des dérivées d'ordre inférieur en tenant compte du système $\boldsymbol{\Delta} = 0$.

❸ une fois ces dérivées injectées dans la condition $pr^{(n_{max})}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta} = 0$, on obtient un système d'EDP linéaire (le système caractéristique) vis à vis des composantes ξ_k et ϕ_k.

❹ il faut résoudre le système caractéristique.

En général, il est assez délicat de trouver les symétries de Lie-Backlünd avec cet algorithme, car il n'y a pas de "recette miracle" pour résoudre le système caractéristique.

II.2.3 Deuxième algorithme de calcul

Le deuxième algorithme de calcul des symétries généralisées repose sur le théorème (II.2.2). On peut ainsi appliquer la méthode suivante :

❶ calculer $pr^{(n_{max})}\boldsymbol{v}_Q\boldsymbol{\Delta}$ pour un générateur :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{p} \xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n_{max})})\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n_{max})})\frac{\partial}{\partial u_k} \tag{II.22}$$

a priori inconnu.

❷ exprimer les dérivées d'ordre le plus haut (ici n_{max}) en fonction des dérivées d'ordre inférieur en tenant compte du système $\boldsymbol{\Delta} = 0$.

❸ une fois les dérivées injectées dans la condition $pr^{(n_{max})}\boldsymbol{v}_Q\boldsymbol{\Delta} = 0$, on obtient un système d'EDP linéaire (le système caractéristique) vis à vis des caractéristiques Q_i.

❹ résoudre le système caractéristique.

❺ on peut remonter aux composantes $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\phi}$ en résolvant les équations :

$$Q_i = \phi_i - \sum_{k=1}^{q} \xi_k u_{i,k} \quad i = 1..q \tag{II.23}$$

vis à vis des inconnues ξ et ϕ.

L'"intérêt" de cet algorithme est que le calcul des symétries devient en premier temps plus compact puisqu'on recherche d'abord les q caractéristiques Q_i avant de trouver toutes les composantes ξ_i et ϕ_i. Toutefois, comme pour l'algorithme précédent, il n'y a pas de "recette miracle" pour résoudre totalement le système caractéristique. On trouvera un exemple de résolution complète dans l'ouvrage d'Olver, [Olv-1989], page 293-295.

Chapitre III

Calcul sur les algèbres de Lie

Sommaire

III.1 Résultats sur les algèbres de Lie

III.1.1 Définition du crochet de Lie pour les symétries géométriques

Nous avons vu aux chapitres I et II comment calculer les symétries d'un système d'EDP $\boldsymbol{\Delta} = 0$. L'ensemble des groupes obtenus possède une structure bien particulière : la structure d'algèbre de Lie. Nous allons présenter très succinctement dans ce chapitre quelques résultats sur ces algèbres de Lie. Pour pouvoir définir la notion d'algèbre, nous allons avoir besoin d'une opération sur les champs de vecteurs. Introduisons ainsi la :

DÉFINITION III.1.1 : ***Le crochet de Lie de deux champs de vecteur généralisés $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ donnés par :***

$$\boldsymbol{v}_1 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n_1)}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(m_1)}) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{III.1}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(n_2)}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(m_2)}) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{III.2}$$

noté $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$, est le champ de vecteur :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \quad = \quad & \left(\sum_{k=1}^{p} pr^{(n_2)} \boldsymbol{v}_1(\xi_k^2) - \sum_{k=1}^{p} pr^{(n_1)} \boldsymbol{v}_2(\xi_k^1) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ + \quad & \left(\sum_{k=1}^{q} pr^{(m_2)} \boldsymbol{v}_1(\phi_k^2) - \sum_{k=1}^{q} pr^{(m_1)} \boldsymbol{v}_2(\phi_k^1) \right) \frac{\partial}{\partial u_k} \end{aligned} \tag{III.3}$$

Notons que dans le cas des symétries géométriques, cette formulation peut se simplifier et on peut énoncer la :

DÉFINITION III.1.2 : ***Le crochet de Lie de deux champs de vecteur non généralisés $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ donnés par :***

$$\boldsymbol{v}_1 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{III.4}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} \phi_k^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{III.5}$$

noté $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$, est le champ de vecteur :

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \left(\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{v}_1(\xi_k^2) - \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{v}_2(\xi_k^1) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \left(\sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{v}_1(\phi_k^2) - \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{v}_2(\phi_k^1) \right) \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{III.6}$$

Considérons un exemple d'application de ces définitions.

EXEMPLE III.1.1 : Soit $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1 = f$, et les générateurs suivants :

$$\boldsymbol{v_1} = (1+t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (t+f)\frac{\partial}{\partial f} \tag{III.7}$$

$$\boldsymbol{v_2} = t\frac{\partial}{\partial t} + f^2\frac{\partial}{\partial f} \tag{III.8}$$

Alors, le crochet de Lie $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ est donné par :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] &= \left(\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(1+t^2)\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}_1(f^2) - \boldsymbol{v}_2(t+f)\right)\frac{\partial}{\partial f} \\ &= \left(1-t^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(2ft + f^2 - t\right)\frac{\partial}{\partial f} \end{aligned} \tag{III.9}$$

■

Le crochet de Lie possède les propriétés suivantes : pour tous générateurs $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ de la forme (III.1) et tous réels c_1, c_2 :

❶ il est bilinéaire :

$$[\boldsymbol{v}, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2] = c_1[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1] + c_2[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2] \tag{III.10}$$

$$[c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}] = c_1[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}] + c_2[\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}] \tag{III.11}$$

❷ il est antisymétrique :

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = -[\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1] \tag{III.12}$$

❸ il satisfait l'identité de Jacobi :

$$[\boldsymbol{v}_1, [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]] + [\boldsymbol{v}_2, [\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1]] + [\boldsymbol{v}_3, [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]] = 0 \tag{III.13}$$

Le crochet de Lie conduit directement à la notion d'algèbre de Lie.

III.1.2 Algèbre de Lie

Une algèbre de Lie est un ensemble de groupes de Lie G_i qui possèdent une structure particulière vis à vis du crochet de Lie. Soit la :

DÉFINITION III.1.3 : ***Une algèbre de Lie de dimension*** s***, notée*** L_s***, est un ensemble de champs de vecteurs généralisés engendrés par combinaisons linéaires de*** s ***champs de vecteurs indépendants notés*** $\{\boldsymbol{v}_i, i = 1..s\}$***, et tels que tous les crochets de Lie*** $[X, Y]$ ***de tous les élements*** X ***et*** Y ***de*** L_s ***restent dans l'ensemble*** L_s***.*** ■

On dit que l'algèbre L_s est **stable** par le crochet de Lie, ce qui s'écrit mathématiquement :

$$\forall X, Y \in L_s, [X, Y] \in L_s$$

La définition que nous venons d'introduire n'est pas directement utilisable sur le plan pratique. Il est possible de caractériser plus efficacement une algèbre de Lie à l'aide du :

THÉORÈME III.1.1 : ***Soit un ensemble L de champs de vecteur v engendré par combinaisons linéaires de s champs de vecteurs indépendants notés $\{\boldsymbol{v}_i, i = 1..s\}$. Alors L est une algèbre de Lie de dimension s si et seulement s'il existe des constantes C_{ij}^k tels que :***

$$[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j] = \sum_{k=1}^{s} C_{ij}^k \boldsymbol{v}_k \tag{III.14}$$

Si elles existent, les C_{ij}^k sont appelées constantes de structure de L. ■

Ainsi, pour vérifier qu'un ensemble de champs de vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ génère une algèbre de Lie, on peut construire la **table de commutation** du groupe. Cette technique consiste à dresser un tableau dont le terme i, j est le crochet de Lie $[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j]$. Si tous les crochets de Lie sont des combinaisons linéaires des $\boldsymbol{v}_k$, alors la famille de vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ forme une algèbre de Lie. Donnons un exemple de table de commutation.

EXEMPLE III.1.2 : Soit $p = 2$, $x_1 = t$, $x_2 = x$, $q = 1$,$u_1 = u(t, x)$, et la famille de vecteur (non généralisés) :

$$\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{v}_1 & = & \frac{\partial}{\partial x} \\
\boldsymbol{v}_2 & = & \frac{\partial}{\partial t} \\
\boldsymbol{v}_3 & = & u\frac{\partial}{\partial u} \\
\boldsymbol{v}_4 & = & x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} \\
\boldsymbol{v}_5 & = & 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u} \\
\boldsymbol{v}_6 & = & 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}
\end{array} \tag{III.15}$$

Alors la table de commutation :

	$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_3$	$\boldsymbol{v}_4$	$\boldsymbol{v}_5$	$\boldsymbol{v}_6$
$\boldsymbol{v}_1$	0	0	0	$\boldsymbol{v}_1$	$-\boldsymbol{v}_3$	$2\boldsymbol{v}_5$
$\boldsymbol{v}_2$	0	0	0	$2\boldsymbol{v}_2$	$2\boldsymbol{v}_1$	$4\boldsymbol{v}_4 - 2\boldsymbol{v}_3$
$\boldsymbol{v}_3$	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{v}_4$	$-\boldsymbol{v}_1$	$-2\boldsymbol{v}_2$	0	0	$\boldsymbol{v}_5$	$2\boldsymbol{v}_6$
$\boldsymbol{v}_5$	$\boldsymbol{v}_3$	$-2\boldsymbol{v}_1$	0	$-\boldsymbol{v}_5$	0	0
$\boldsymbol{v}_6$	$-2\boldsymbol{v}_5$	$2\boldsymbol{v}_3 - 4\boldsymbol{v}_4$	0	$-2\boldsymbol{v}_6$	0	0

montre clairement (par application du théorème (III.1.1)) que la famille de vecteurs (III.15) forme une algèbre de Lie L_6 de dimension 6. Cette algèbre est l'ensemble des champs de vecteurs $\boldsymbol{v}$ de la forme :

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 + c_5\boldsymbol{v}_5 + c_6\boldsymbol{v}_6 \tag{III.16}$$

où les c_i sont des constantes réelles. On utilise parfois la notation :

$$L_6 = \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_6\} \tag{III.17}$$

où la notation “Vect” signifie “toutes les combinaisons linéaires de”. ■

Ajoutons pour terminer cette section que le calcul des symétries d'un système d'EDP est intimement lié à la notion d'algèbre de Lie en énonçant le :

THÉORÈME III.1.2 : ***L'ensemble des groupes de symétries généralisées d'un système d'EDP $\boldsymbol{\Delta} = 0$ dont tous les prolongements sont localement solvables et de rang maximal possède une structure d'algèbre de Lie.*** ■

De même que pour la définition du crochet de Lie, appliquons ce théorème au cas particulier des symétries géométriques :

THÉORÈME III.1.3 : ***L'ensemble des groupes de symétries ponctuelles d'un système d'EDP $\boldsymbol{\Delta} = 0$ localement solvable et de rang maximal possède une structure d'algèbre de Lie.*** ■

L'intérêt de ces deux derniers théorèmes est qu'étant données deux symétries $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ d'une EDP, il est possible d'en construire une troisième sous la forme $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$. La notion d'algèbre de Lie permet de généraliser celle de groupe à un paramètre.

III.2 Groupes à plusieurs paramètres

III.2.1 Définition

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des groupes à un paramètre μ, qu'ils soient de type géométrique ou de type Lie-Backlünd. Il est intéressant d'évoquer quelques résultats sur les groupes à plusieurs paramètres. On se limite ici à des transformations de type géométriques. Un groupe de transformations à r paramètres est la donnée d'applications :

$$G : \left\{ \begin{array}{ll} \overline{x_j} = \overline{x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_1, \cdots, \mu_r) & j = 1..p \\ \overline{u_j} = \overline{u_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \mu_1, \cdots, \mu_r) & j = 1..q \end{array} \right. \tag{III.18}$$

vérifiant comme pour les groupes à un paramètre les trois axiomes de composition, d'élément neutre et d'inversion. Entrer dans le détail de la généralisation de ces trois axiomes n'est pas véritablement intéressant sur le plan pratique (voir Ibragimov, [Ibr-1995], pages 24-25). En revanche, il peut s'avérer utile de construire un groupe à r paramètres à partir de la base $\{\boldsymbol{v}_i, i = 1..r\}$ d'une algèbre de Lie de dimension r. Tout d'abord retenons le :

THÉORÈME III.2.1 : ***Pout tout groupe à r paramètres, la famille de vecteurs $\boldsymbol{v}_j$, $j = 1..r$ définie par :***

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{p} \left. \frac{\partial \overline{x_i}}{\partial \mu_j} \right|_{\mu_j = 0} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \left. \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial \mu_j} \right|_{\mu_j = 0} \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{III.19}$$

génére une algèbre de Lie de dimension r. ■

Réciproquement, pour obtenir un groupe à plusieurs paramètre à partir d'une famille de vecteurs $\boldsymbol{v}_i$, il suffit d'appliquer l'algorithme suivant :

❶ Vérifier que la famille $\boldsymbol{v}_i$ génére bien une algèbre de Lie en construisant sa table de commutation, et en vérifiant que tous les crochets de Lie sont des combinaisons linéaires des $\boldsymbol{v}_i$.

❷ Calculer l'exponentielle de chaque générateur $\boldsymbol{v}_i$ de manière indépendante, de manière à obtenir r groupes indépendants à un paramètre.

❸ Composer à la suite tous les groupes ainsi obtenus de manière à faire apparaître un seul groupe à r paramètres.

Il convient d'appliquer immédiatement cet algorithme sur un cas particulier.

EXEMPLE III.2.1 : Soit pour $p = 1$, $x_1 = t$, $q = 1$, $u_1 = u$ les champs de vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \boldsymbol{v}_2 = t\frac{\partial}{\partial t} \qquad \boldsymbol{v}_3 = u\frac{\partial}{\partial u} \tag{III.20}$$

Cette famille génère une algèbre de Lie comme le montre sa table de commutation :

	$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_3$
$\boldsymbol{v}_1$	0	$\boldsymbol{v}_1$	0
$\boldsymbol{v}_1$	$-\boldsymbol{v}_1$	0	0
$\boldsymbol{v}_1$	0	0	0

■

Les groupes à un paramètre engendrés par l'exponentielle de ces générateurs sont donnés par :

$$G1 = \left\{ \begin{array}{lll} \bar{t} & = & t + \mu_1 \\ \bar{u} & = & u \end{array} \right. \qquad G2 = \left\{ \begin{array}{lll} \bar{t} & = & e^{\mu_2} t \\ \bar{u} & = & u \end{array} \right. \qquad G3 = \left\{ \begin{array}{lll} \bar{t} & = & t \\ \bar{u} & = & e^{\mu_3} u \end{array} \right. \tag{III.21}$$

et on peut obtenir un groupe à 3 paramètres par composition de G_1, G_2, G_3 :

$$G = G_3 \circ G_2 \circ G_1 = \left\{ \begin{array}{lll} \bar{t} & = & e^{\mu_2}(t + \mu_1) \\ \bar{u} & = & e^{\mu_3} u \end{array} \right. \tag{III.22}$$

Notons qu'il est possible de reconstruire les générateurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ à partir de G et ce via le théorème (III.2.1) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \left.\frac{\partial(e^{\mu_2}(t+\mu_1))}{\partial \mu_1}\right|_{\mu_1=0} \frac{\partial}{\partial t} + \left.\frac{\partial(e^{\mu_3}u)}{\partial \mu_1}\right|_{\mu_1=0} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial t} \\ \boldsymbol{v}_2 &= \left.\frac{\partial(e^{\mu_2}(t+\mu_1))}{\partial \mu_2}\right|_{\mu_2=0} \frac{\partial}{\partial t} + \left.\frac{\partial(e^{\mu_3}u)}{\partial \mu_2}\right|_{\mu_2=0} \frac{\partial}{\partial u} = t\frac{\partial}{\partial t} \\ \boldsymbol{v}_3 &= \left.\frac{\partial(e^{\mu_2}(t+\mu_1))}{\partial \mu_3}\right|_{\mu_3=0} \frac{\partial}{\partial t} + \left.\frac{\partial(e^{\mu_3}u)}{\partial \mu_3}\right|_{\mu_3=0} \frac{\partial}{\partial u} = u\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \tag{III.23}$$

En pratique, cet algorithme pourra servir à synthétiser tous les groupes de symétries d'une EDP en un seul groupe. Terminons ce chapitre par quelques éléments sur les invariants d'un groupe à r paramètres.

III.2.2 Calculs des invariants

Comme au chapitre I, on peut définir la notion d'invariant pour un groupe à plusieurs paramètres. Ainsi, la définition (I.2.3) reste valide pour de tels groupes. Pour obtenir tous les invariants d'un groupe à r paramètres, on doit généraliser les techniques présentées à la section I.2.3. Recherchons ainsi une trajectoire $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = cste$ générée par un vecteur élementaire $(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{u})$, et tangente aux générateurs de base $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1..r$ d'un groupe G à r paramètres :

– On peut chercher les fonctions F telle que ∇F soit orthogonal à tous les vecteurs de base $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1..r$, d'où un système de r EDP en F :

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla F = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\phi})_i \cdot \nabla F = 0 \qquad i = 1..r \tag{III.24}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{v}_i(F) = 0 \qquad i = 1..r \tag{III.25}$$

– On peut écrire la relation de colinéarité :

$$(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{u}) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \lambda_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\phi})_i \qquad i = 1..r \tag{III.26}$$

ce qui conduit, après élimination de λ_i, au système en $d\boldsymbol{x}$ et $d\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{\xi_1^1} &= \cdots = \frac{dx_p}{\xi_p^1} = \frac{du_1}{\phi_1^1} = \cdots = \frac{du_q}{\phi_q^1} \\
\frac{dx_1}{\xi_1^2} &= \cdots = \frac{dx_p}{\xi_p^2} = \frac{du_1}{\phi_1^2} = \cdots = \frac{du_q}{\phi_q^2} \\
\cdots & \\
\frac{dx_1}{\xi_1^r} &= \cdots = \frac{dx_p}{\xi_p^r} = \frac{du_1}{\phi_1^r} = \cdots = \frac{du_q}{\phi_q^r}
\end{aligned} \tag{III.27}$$

où $\{\boldsymbol{\xi}_k^i, k = 1..p\}$, et $\{\boldsymbol{\phi}_k^i, k = 1..q\}$, sont les coordonnées de $\boldsymbol{v}_i$.

On peut montrer que le nombre d'invariants indépendants d'un groupe à r paramètres est $p+q-r^*$, ou r^* est défini comme étant le rang de la matrice formée par les composantes des $\boldsymbol{v}_i$, soit[1] :

$$r^* = \text{rg} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^r \\ \xi_p^1 & \xi_p^2 & \cdots & \xi_q^r \\ \phi_1^1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^r \\ \phi_q^1 & \phi_q^2 & \cdots & \phi_q^r \end{pmatrix} \tag{III.28}$$

Voyons l'application de ces résultats sur un exemple.

EXEMPLE III.2.2 : En reprenant le groupe à trois paramètres de l'exemple (III.2.1), engendré par les générateurs :

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{v}_2 = t\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{v}_3 = u\frac{\partial}{\partial u} \tag{III.29}$$

calculons r^* via l'équation (III.28) qui prend ici la forme :

$$r^* = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{cases} \tag{III.30}$$

Soit une fonction $F(t, u)$, le système (III.25) se réécrit :

$$\frac{\partial F(t,u)}{\partial t} = 0 \qquad t\frac{\partial F(t,u)}{\partial t} = 0 \qquad u\frac{\partial F(t,u)}{\partial u} = 0 \tag{III.31}$$

ce qui est équivalent à l'unique équation :

$$u\frac{\partial F(u)}{\partial u} = 0 \tag{III.32}$$

Si $u \neq 0$, $p + q - r^* = 1 + 1 - 2 = 0$ et le groupe n'admet pas d'invariant. En effet, l'équation (III.32) conduit à la solution triviale $F = cste$. Si $u = 0$, alors la solution à (III.32) est une fonction quelconque $F(u)$, et l'unique invariant du groupe est u (ce qui paraît évident car $u = 0$!).

[1] Rappelons que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par combinaisons linéaires de ses vecteurs colonnes.

Vers la version suivante...

Evoquons quelques points à creuser dans le but d'évoluer vers la version 2.0 de ce document :

- Calculer la dimension de l'algèbre de Lie d'un système d'EDP, sans intégrer les équations caractéristiques.
- Présenter quelques résultats sur les séries formelles. Cette technique présente-t-elle réellement un intérêt sur le plan pratique ?
- Evoquer la méthode de calcul basée sur la dérivée de Lie. Même question que pour l'item précédent.
- Trouver ou écrire un package Maxima puissant permettant de calculer les symétries d'un système d'EDP.
- ...

Références

[Ibr-1994] IBRAGIMOV N.H. et al. *Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, exact solutions, and conservation laws*. Ibragimov. 1994. Vol. 1. ISBN : 0-8493-4488-3.

[Ibr-1995] IBRAGIMOV N.H. et al. *Lie Group Analysis of Differential Equations. Applications in engineering and physical sciences*. Ibragimov. 1995. Vol. 2. ISBN : 0-8493-2864-0.

[Ibr-1996] IBRAGIMOV N.H. et al. *Lie Group Analysis of Differential Equations. New trends in theoretical developments and computational methods*. Ibragimov. 1996. Vol. 3. ISBN : 0-8493-9419-8.

[Olv-1989] OLVER Peter. *Application of Lie group to differential equations*. Springer Verlag, 1989. ISBN : 0-387-94007-3.

[Ser-2000] SERO-GUILLAUME Olivier. *Mathématiques*. Cours E.N.S.E.M. I.N.P. Lorraine

[Tal-1993] TALPAERT Yves. *Leçons et applications de géométrie différentielle et de mécanique analytique*. Cépaduès Editions. 1993. ISBN : 2-85428-325-2